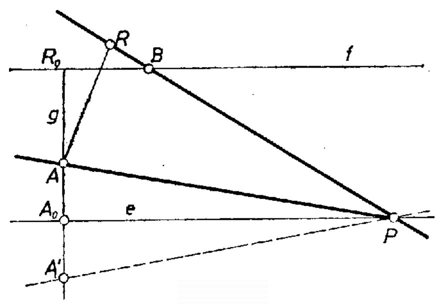
I. megoldás. *a)* Ha a P pont távolodik az adott e egyenesen az A pont e-n levő A_0 vetületétől, a BPA_0 szög egyre kisebb lesz, a BP egyenes egyre jobban megközelíti a B-n át e-vel párhuzamosan húzott f egyenest (1. ábra).

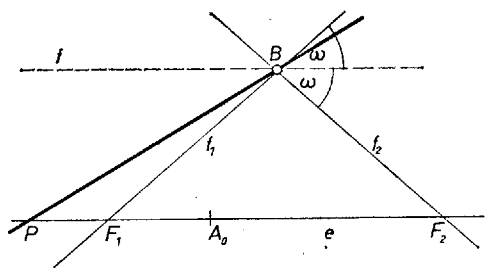


1. ábra

Az egyenlő szárú APR háromszög P-nél levő szöge is egyre kisebb lesz, az AR alapon levő szögei pedig $90°$-hoz tartanak. Az AR egyenes így egyre közelebb lesz az A-n átmenő, e-re merőleges g egyeneshez. Ezek alapján azt várjuk, hogy R határhelyzete az f és g egyenesek R_0 metszéspontja lesz.

Sejtésünket a következő módon mondhatjuk ki pontosan: tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz van olyan d, hogy minden olyan P pontra, melyre $A_0P > d$, teljesül, hogy $R_0R < \varepsilon$. Ezt fogjuk bizonyítani, előbb azonban a PR, AR egyenesekre vonatkozó állításainkat látjuk be. Feltehetjük, hogy A és B különböző pontok, ellenkező esetben ugyanis P minden helyzeténél az A, B, R, R_0 pontok azonosak; továbbá azt is, hogy B nincs rajta e-n.

b) Az, hogy a BP egyenes tart f-hez, esetünkben pontosabban azt jelenti, hogy tetszőleges $\omega > 0$-hoz van olyan d, hogy ha $A_0P > d$, akkor a BP és f egyenesek szöge kisebb ω-nál, azaz a BP egyenes a B ponton átmenő, f-fel ω szöget bezáró f_1, f_2 egyenesek közti csúcsszög-tartomány belsejében halad (természetesen $\omega < 90°$; 2. ábra).



2. ábra

Az f_i egyenesek e-vel alkotott metszéspontját F_i-vel jelölve ($i = 1,\ 2$), a PB egyenes akkor és csak akkor halad az f_1, f_2 egyenesek által létesített szögtartományok közül az f-et tartalmazóknak a belsejében, ha P az e egyenesnek az F_1F_2 szakaszon kívüli félegyenesein helyezkedik el. Legyen d az A_0F_1, A_0F_2 távolságok közül a nagyobbik, ekkor az $A_0P > d$ egyenlőtlenségből következik, hogy P kívül van az F_1F_2 szakaszon, hiszen az F_1F_2 szakasz egyik pontja sincs A_0 tól d-nél távolabb. d-nek ez az értéke tehát megfelelő, ezzel a BP egyenesre vonatkozó állításunkat bebizonyítottuk.

c) Az AR egyenesre vonatkozó állításunkat hasonlóan fogalmazhatjuk meg pontosabban: tetszőleges ω hegyesszöghöz van olyan d, hogy ha $A_0P > d$, akkor az AR és g egyenesek közti szög kisebb ω-nál.

Válasszuk az ω_1, ω_2, hegyesszögeket egyelőre tetszőlegesen; láttuk, hogy van olyan d_1, hogy ha $A_0P > d_1$, akkor a BP és f egyenesek szöge (ami egyenlő BP és e szögével) kisebb ω_1-nél. Hasonlóan van olyan d_2, hogy ha $A_0P \geq d_2$, akkor $APA_0\sphericalangle < \omega_2$. Ha mármost A_0P a d_1-nél is, d_2 nél is nagyobb, akkor $APR\sphericalangle < \omega_1 + \omega_2$, hiszen az APR szög az RPA_0, APA_0, szögeknek vagy az összegével vagy a különbségével egyenlő (aszerint, hogy A és B az e-nek két oldalán vagy ugyanazon oldalán van), így nem lehet nagyobb e szögek összegénél. Ha pedig $APR\sphericalangle < \omega_1 + \omega_2$, akkor

$$PAR\sphericalangle = 90° - \frac{1}{2}APR\sphericalangle > 90° - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}.$$

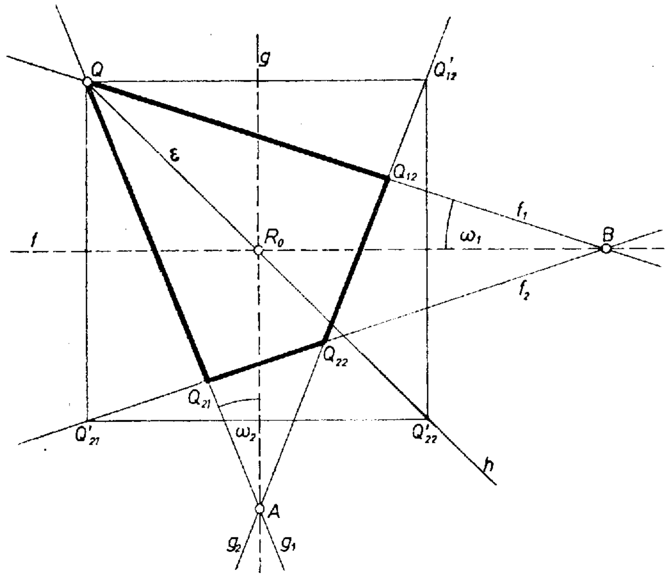
Az AR és g egyenesek közti szög nem lehet nagyobb, mint annak a két szögnek az összege, amelyek közül az egyik az AP és e egyenesek szöge, a másik pedig $\frac{1}{2}APR\sphericalangle$, amennyivel a $PAR\sphericalangle$ $90°$-nál kisebb. Így az AR és g egyenesek közti szög kisebb, mint

$$\omega_1 + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \frac{3\omega_1 + \omega_2}{2}.$$

Ha tehát ω_1-et és ω_2-t egyenlőnek választjuk $\omega/2$-vel, akkor ez a szög kisebb ω-nál, hacsak $A_0P > d$, ahol $d = \max(d_1,\ d_2)$.

Bizonyításunk közben láttuk, hogy d-nek ez a választása azt is biztosítja, hogy a BP, f egyenesek szöge kisebb legyen ω_1-nél, tehát ez a szög is kisebb ω-nál.

d) Rátérünk sejtésünk bizonyítására (lásd 2. bekezdés). Legyen ε tetszőleges pozitív szám, és jelöljük az R_0A, R_0B félegyenesek közti szög felezőjét h-val, Q pedig legyen h-nak e szögtartományon túli részén az a pont, melyre $R_0Q = \varepsilon$ (3. ábra).



3. ábra

(Ha A vagy B azonos R_0-lal, h-t az f és g egyenesek két szögfelezője közül tetszőlegesen választhatjuk.) Jelöljük az AQ, BQ egyeneseket g_1-gyel, illetve f_1-gyel, és legyen f_2 az f_1-nek f-re, g_2 pedig g_1-nek g-re vonatkozó tükörképe. Legyen ω_1, az f_1 és f, ω_2, a g_1, és g egyenesek közti szög, és ω az ω_1, ω_2 szögek közül a kisebbik, és válasszuk meg ω-hoz d-t a *c)* pont szerint. Eszerint ha $A_0P > d$, akkor a BR és f, valamint az AR és g egyenesek közti szög kisebb ω-nál, BP tehát f_1 és f_2 között, AR pedig g_1 és g_2 között halad. Az AR, BP egyenesek R közös pontja tehát az f_1, f_2 és a g_1, g_2 egyenesek által meghatározott szögtartományok belsejében van. Megmutatjuk, hogy ha R e szögtartományok közös részének tetszőleges pontja, akkor $RR_0 < \varepsilon$, állításunkat ezzel bebizonyítjuk.

Jelöljük az f_i, g_j egyenesek metszéspontját Q_{ij}-ve1, a Q csúcsú és f, g tengelyű T téglalap csúcsait pedig Q'_{ij}-vel ($Q_{11} \equiv Q'_{11} \equiv Q$). Az f_2, g_2 egyenesek a Q'_{21}, Q'_{12} csúcsokból T belseje felé indulnak, így metszéspontjuk, Q_{22} is T belsejében van. Mivel Q_{12} a $Q'_{12}Q_{22}$ szakaszon van, Q_{12} is T belsejében van, hasonló módon kapjuk, hogy Q_{21} is T belsejében van, tehát a $QQ_{12}Q_{22}Q_{21}$ négyszög T belsejében van, T pedig az R_0 középpontú, ε sugarú kör belsejében, így a $QQ_{12}/Q_{22}Q_{21}$ négyszög pontjainak R_0-tól mért távolsága kisebb ε-nál. –
Ezt akartuk bizonyítani.

Prőhle Tamás (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., IV. o. t.)
dolgozatát felhasználva kiegészítésekkel

II. megoldás. Válasszuk derékszögű koordináta-rendszerünk x tengelyének az e egyenest és legyenek adott pontjaink koordinátái: $B(0,\, b)$ – ahol $b > 0$ – és $A(d,\, a)$, továbbá $P(x,\, 0)$. Így $PA = \sqrt{(x-d)^2 + a^2}$, és R koordinátái:

$$y_R = PA \cdot \sin BPO\sphericalangle = \frac{b\sqrt{(x-d)^2+a^2}}{\sqrt{x^2+b^2}},$$
$$x_R = x - PA \cdot \cos BPO\sphericalangle = x - \frac{x\sqrt{(x-d)^2+a^2}}{\sqrt{x^2+b^2}}.$$

A koordinátákat megadó két függvénynek a végtelenben vett határértéke – amennyiben mindkettő létezik – megadja a kérdéses határhelyzet megfelelő koordinátáit.

Az átalakítással adódó

$$y_R = b \cdot \sqrt{\frac{\left(1 - \dfrac{d}{x}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{x}\right)^2}{1 + \left(\dfrac{b}{x}\right)^2}}$$

kifejezésben a d/x, a/x, b/x határértéke (a plusz végtelenben és a mínusz végtelenben egyaránt) 0, így a gyök alatt a számláló és a nevező határértéke egyaránt 1, hányadosuknak és négyzetgyökének határértéke 1, ezért y_R határértéke létezik, és

$$\lim_{x\to+\infty} y_R = b.$$

Hasonlóan, a számláló konjugáltjával bővítve, majd a legutóbbihoz hasonló meggondolás-sorozattal

$$x_R=\frac{x\left(\sqrt{x^2+b^2}-\sqrt{(x-d)^2+a^2}\right)}{\sqrt{x^2+b^2}}=\frac{x\left(x^2+b^2-(x-d)^2-a^2\right)}{\sqrt{x^2+b^2}\left(\sqrt{x^2+b^2}+\sqrt{(x-d)^2+a^2}\right)}=$$

$$=\frac{2dx^2+(b^2-d^2-a^2)x}{(x^2+b^2)+\sqrt{(x^2+b^2)\{(x-d)^2+a^2\}}}=\frac{2d+\dfrac{b^2-d^2-a^2}{x}}{1+\left(\dfrac{b}{x}\right)^2+\sqrt{\left\{1+\left(\dfrac{b}{x}\right)^2\right\}\left\{\left(1-\dfrac{d}{x}\right)^2+\left(\dfrac{a}{x}\right)^2\right\}}},$$

a nevező határértéke 2, a számlálóé $2d$, és így

$$\lim_{x\to+\infty}x_R=d.$$

Minthogy mindkét határérték létezik, azért a keresett határhelyzet is létezik, és koordinátái $(d,\ b)$, tehát a határhelyzet az A-n át az y tengellyel és B-n át az x tengellyel párhuzamosan húzott egyenesek metszéspontja, az I. megoldásbeli R_0 pont.

Sashegyi László (Tatabánya, Árpád Gimn., III. o. t.)
Bihari Imre (Debrecen, Fazekas M. Gimn., III. o. t.)