

Az  $a + b = c$  és  $a - b = d$  rövidítések bevezetésével egyenletünk így alakul:

$$\frac{\{(x+c)^7 + (x-c)^7\} - \{(x+d)^7 + (x-d)^7\}}{\{(x+c)^5 + (x-c)^5\} - \{(x+d)^5 + (x-d)^5\}} = \frac{7}{2}(c^2 + d^2).$$

A számláló és a nevező első  $\{ \}$ -ében álló hatványokat tagokra bontva a  $c$ -t páratlan kitevőjű hatványon tartalmazó tagok kiesnek. A keletkező kifejezések:

$$\begin{aligned} 2x^7 + 42x^5c^2 + 70x^3c^4 + 14xc^6, \\ 2x^5 + 20x^3c^2 + 10xc^4, \end{aligned}$$

a két kivonandó megkapható ezekből  $c$  helyére  $d$ -t írva, így az egyenlet:

$$\frac{42x^5(c^2 - d^2) + 70x^3(c^4 - d^4) + 14x(c^6 - d^6)}{20x^3(c^2 - d^2) + 10x(c^4 - d^4)} = \frac{7}{2}(c^2 + d^2).$$

Innen látható, hogy  $x = 0$  nem tartozik a bal oldal értelmezési tartományába, továbbá kizárandók azok a paraméter értékpárok, amelyekre  $c^2 = d^2$ ,  $|c| = |d|$ , azaz amelyekben  $a = 0$ , továbbá azok, amelyekben  $b = 0$ . A gyökök tehát a megfelelő egyszerűsítésekkel adódó

$$\frac{3x^4 + 5x^2(c^2 + d^2) + (c^4 + c^2d^2 + d^2)}{10x^2 + 5(c^2 + d^2)} = \frac{1}{2}(c^2 + d^2)$$

egyenletből számítandók. A nevező (a fenti kizárások alapján) pozitív, így a szokásos rendezési lépésekkel és az eredeti paraméterekre visszatérve

$$x = \pm \sqrt[4]{\frac{3c^4 + 8c^2d^2 + 3d^4}{6}} = \pm \sqrt[4]{\frac{7a^4 + 10a^2b^2 + 7b^4}{3}}$$

(két valós gyök) hacsak  $a \neq b$  és  $a \neq -b$ . A kapott két gyök csak  $a = b = 0$  esetén volna egyenlő, amit kizártunk.

*Fazekas Mária* (Pápa, Türr I. Gimn., III. o. t.)

*Megjegyzés.* Az egyenlet bal oldalának jelentős egyszerűsödése előre látható abból az észrevételből is, hogy  $x$  helyére  $-x$ -et írva a számláló is, a nevező is a  $(-1)$ -szeresébe megy át és ugyanez áll  $a$  helyére  $-a$ -t,  $b$  helyére  $-b$ -t írva is, ezért  $x = 0$ ,  $a = 0$ ,  $b = 0$  bármelyike esetén a számláló is, a nevező is 0, vagyis belőlük mint  $x$ ,  $a$  és  $b$  polinomjából az  $abx$  közös tényező kiemelhető.