Az I. forduló feladatai:

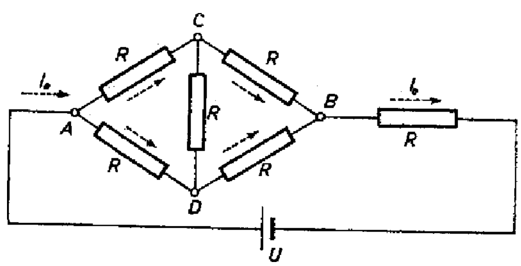
1. *A Föld felszínétől mérve mekkora magasságban kering az a mesterséges hold, amelynek keringési ideje* 90 *perc? A Földet gömbalakúnak tekintve, sugarát* 6370 km-*nek vesszük és a Föld felszínén mért nehézségi gyorsulást ismertnek tételezzük fel* ($g_0 = 981$ cm/sec^2). *A mesterséges hold körpályán kering.*

Megoldás: A mesterséges hold centripetális gyorsulása egyenlő a tömegvonzási erőből származó gyorsulással: $\omega^2 r = \dfrac{fM}{r^2}$. Itt f gravitációs állandó és M a Föld tömege, ω pedig a szögsebesség, amely a mi esetünkben $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{5400\ \text{sec}} = 1{,}164 \cdot 10^{-3}\ \text{sec}^{-1}$; a körpálya rádiusza r. A mesterséges hold körpályájának rádiusza:

$$r = \sqrt[3]{\frac{fM}{\omega^2}}.$$

A Föld felszínén a középponttól r_0 távolságban a nehézségi gyorsulás $g_0 = \dfrac{fM}{r_0^2}$, vagyis $fM = g_0 r_0^2$. Ezzel a körpálya rádiusza $r = \sqrt[3]{\dfrac{g_0 r_0^2}{\omega^2}}$. Számadatainkat felhasználva $r = 6650$ km és a Föld felszíne feletti magasság $r - r_0 = 6650 - 6370 = 280$ km.

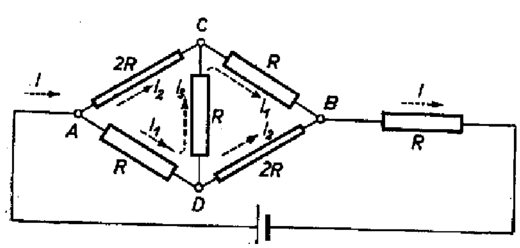
2. *Az ábra szerinti kapcsolás esetén, ha* R *ellenállások értéke egyenlő, akkor a főágban* I *erősségű áram folyik. Hányszorosára változik ez az áram, ha két, átellenesen fekvő ellenállás értékét megkétszerezzük?*



1. ábra

Megoldás: Az 1. ábra szerint C és D pontok feszültsége egyenlő, ezért a közöttük levő, átlósan fekvő ellenállást kiiktathatjuk. Az ACB darab, valamint az ADB darab ellenállása $2R$, azonban a két párhuzamosan kapcsolt $2R$ eredője R, amely sorba van kapcsolva a különálló R ellenállással. Így az egész áramkör ellenállása $2R$ és az áramerősség:

$$I_0 = \frac{U}{2R}.$$



2. ábra

A 2. ábra szerint a teljes I áramerősség I_1 és I_2 részre oszlik szét A pontban. Jelen esetben D és C feszültsége eltérő, ezért D és C között levő ellenálláson I_3 áram folyik. A feszültségesés A-tól C-ig ugyanannyi, mint ADC úton: $2RI_2 = RI_1 + RI_3$, illetve

$$2I_2 = I_1 + I_3;$$

továbbá felírjuk az áramelágazás követelményét A-ban és D-ben:

$$I = I_1 + I_2, \quad I_1 = I_2 + I_3.$$

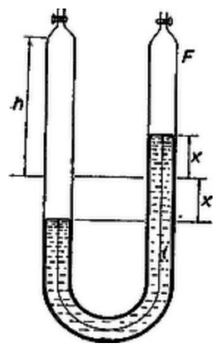
Három egyenletünket megoldjuk I_1, I_2 és I_3-ra; az eredmény:

$$I_1 = \frac{3}{5}I, \qquad I_2 = \frac{2}{5}I, \qquad I_3 = \frac{1}{5}I.$$

Az egész feszültségesés A és B között: $2RI_2 + RI_1 = \frac{7}{5}RI$, ezt osztva I áramerősséggel kapjuk a négyszög eredő ellenállását, $\frac{7}{5}R$-t. Ezzel sorba van kapcsolva R ellenállás, így az áramkör teljes ellenállása $\frac{7}{5}R + R = \frac{12}{5}R$ és az áramerősség: $I = U : \frac{12}{5}R = \frac{5U}{12R}$.

Az áramerősségek aránya: $\frac{I}{I_0} = \frac{5}{6}$.

3. *U alakú csőbe, amelynek végei csappal elzárhatók, higanyt töltünk. A betöltött higanyszál teljes hossza l. A cső függőleges állásánál a cső mindkét szárában a higanyszint fölött h hosszúságú levegőoszlop van. Ha a csövet kissé megdöntjük, majd hirtelen visszaállítjuk függőleges helyzetébe, a higanyszál lengő mozgásba jön. A higanyszálat előbb a csapok nyitott, majd zárt állása mellett hozzuk lengésbe. Mennyi a két lengésidő hányadosa? A súrlódást ne vegyük figyelembe és tekintsünk el a levegő térfogatváltozása közben fellépő hőmérséklet-változásoktól is. A lengés amplitúdója igen kicsiny legyen h-hoz képest. Legyen h éppen egyenlő a barométerállással.*



3. ábra

Megoldás: Azonnal a zárt csapok melletti esetet vizsgáljuk meg (3. ábra). A keresztmetszet területe F, a folyadék sűrűsége d, térfogata Fl, tömege Fld. x darabbal történő elmozdulás esetében $2xFdg$ súlyú folyadékoszlop hidrosztatikai ereje viszi vissza a folyadékot eredeti helyzete felé.

Kezdetben mindegyik csőben a légnyomás p_0, a levegő nyomóereje p_0F és a levegő térfogata hF. Ha a folyadék x darabbal mozdult el, akkor a jobboldali csőben a levegő térfogata $(h-x)F$, és nyomása Boyle–Mariotte törvénye szerint $p_0 \cdot \frac{h}{h-x}$, az erő pedig $p_0F \cdot \frac{h}{h-x}$. Hasonlóan a baloldali csőben $(h+x)F$ térfogatú, $p_0 \cdot \frac{h}{h+x}$ nyomású levegő $p_0F \cdot \frac{h}{h+x}$ nagyságú nyomóerőt fejt ki a folyadék felszínére. A két levegőmennyiség eredőként a folyadékra

$$p_0F \cdot \left[\frac{h}{h-x} - \frac{h}{h+x}\right] = 2p_0Fh \cdot \frac{x}{h^2 - x^2}$$

nagyságú erőt fejt ki. A feladat szövege szerint csak kis kimozdulásokkal kell foglalkoznunk, ezért x^2-et elhanyagoljuk h^2 mellett, így a levegők által kifejtett erők eredője:

$$\frac{2p_0Fx}{h};$$

hozzávéve a folyadékoszlop hidrosztatikai erejét, a folyadékot visszavivő teljes erő:

$$2xFdg + \frac{2p_0Fx}{h}.$$

Látjuk, hogy a folyadékot a nyugalmi helyzetbe visszavivő erő egyenesen arányos x elmozdulással. Ebből következik, hogy rezgő mozgás keletkezik, amelyre érvényes az $m\omega^2 x$ erőtörvény (m tömeg, $\omega = 2\pi/T$ szögsebesség):

$$Fld\omega^2 x = 2xFdg + \frac{2p_0Fx}{h}.$$

Innen a lengésidő:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g\left(1 + \frac{p_0}{dhg}\right)}}.$$

Ha a csapok nyitva vannak, akkor $h = \infty$, és ebben az esetben a lengésidő

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}.$$

A lengésidők hányadosa:

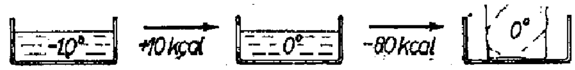
$$\frac{T_0}{T} = \sqrt{1 + \frac{p_0}{dhg}}.$$

Ha $d = 13{,}6$ g/cm^3, $h = 76$ cm, $g = 981$ cm/sec^2, $p_0 = 1$ atm $= 1013000$ din/cm^2, akkor a második tag is 1, és $T_0/T = \sqrt{2}$.

Néhány megjegyzés. A cső keresztmetszet területe mindenképp kiesik a számításból. Nyitott csapok esetében a folyadék sűrűsége sem számít, és a lengésidő annyi, mint egy $l/2$ hosszúságú fonálingáé. Zárt csapok esetében csak kis amplitúdók esetében tekinthető közelítően sinusnak a lengés. A valóságban a levegő térfogatváltozásai adiabatikusak, és kappa, a két fajhő hányadosa is odakerül a p_0/dhg tört mellé.

A II. forduló feladatai:

1. *Ha* 1 kg 0°*-os víz megfagy (*0°*-os jéggé alakul), akkor* 80 kcal *hő szabadul fel. Mennyi hő szabadul fel* 1 kg $-10°$*-os túlhűtött víz* 10°*-os állandó hőmérsékleten történő megfagyása közben? (Használjuk fel az energiamegmaradás tételét! A* 0° *és* $-10°$ *között a jég és a víz sűrűségváltozását gyakorlatilag elhanyagoljuk).*



4. ábra

Megoldás: Két folyamatot hasonlítunk össze, amelyek kezdő és végső állapota azonos. Először a $-10°$-os vizet felmelegítjük 0°-os vízzé, amihez 10 kcal hőt kell beadnunk, azután a 0°-os vizet 0°-on megfagyasztjuk, amikor is 80 kcal hő leadása megy végbe (4. ábra).

5. ábra

Másodszor a $-10°$-os vizet ezen a $-10°$-os hőmérsékleten fagyasztjuk meg, amikor is x kcal hőt kell elvonnunk. A $-10°$-os jeget 5 kcal hőmennyiség beadásával melegítjük fel 0°-ra, mert a jég fajhője 0,5 kcal/kg fok. (5. ábra)

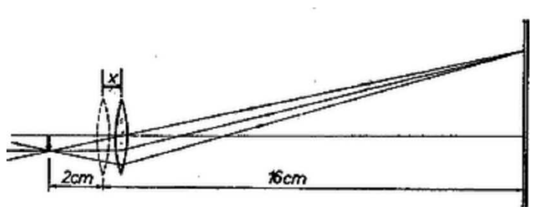
Mindkét esetben a külső erők ellen végzett munka ugyanakkora, mert a feladat szövege szerint a víz és jég sűrűségkülönbsége mindkét hőmérsékleten ugyanakkorának veendő. Mindkét út esetében az 1 kg H_2O kezdeti és végső állapota azonos. Ebből következik, hogy a felvett hőmennyiségek, az energiamegmaradás törvénye szerint mindkét út esetében egyenlők:

$$10 - 80 = -x + 5,$$

innen a $-10°$-os túlhűtött víz olvadási hője:

$$x = 75 \text{ kcal/kg}.$$

2. *Egy távcsőbe végtelenre akkomodált szemmel belenézve élesen látnánk a Nap képét. Mennyivel kell elmozdítanunk a távcső szemlencséjét, hogy az eredetileg tőle* 16 cm*-re felállított ernyőn élesen jelenjen meg a Nap képe? A szemlencse fókusztávolságának abszolút értéke* 2 cm.



6. ábra

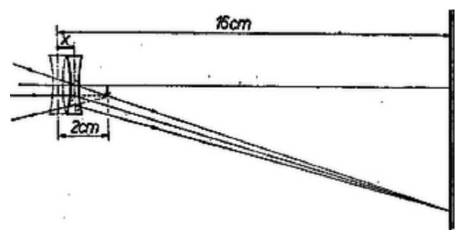
Megoldás: A csillagászati távcső használatakor a tárgylencse és a szemlencse fókuszpontjai egybeesnek. A nagyon távoli tárgy képe a tárgylencse gyújtósíkjában keletkezik, és ez a kép a szemlencse számára tárgyként szerepel. A szemlencsét x darabkával kifelé húzva, az ernyőn reális kép keletkezik (6. ábra). A tárgytávolság $2 + x$, a képtávolság $16 - x$, ezért a lencsetörvény szerint:

$$\frac{1}{2+x} + \frac{1}{16-x} = \frac{1}{2}.$$

Rendezve:

$$x^2 - 14x + 4 = 0.$$

Megoldása: $x = 7 \pm 3\sqrt{5}$. A 0,28 cm a számunkra használható eredmény, mert 13,72 cm-es lencseeltolásnál is keletkezne reális kép, de rendkívül kicsinyített.



7. ábra

A Nap képének kivetítése a Galilei-féle távcsőnél is lehetséges (7. ábra). Ekkor a szemlencse szórólencse, amelyet a tárgylencséből érkező sugárnyalábba helyezünk, mielőtt a sugarak egyesülhettek volna. A szemlencsét ismét kifelé húzzuk x darabbal. Ekkor a tárgylencsétől érkező sugárnyaláb $2-x$ távolságban levő virtuális tárgyat jelent a szemlencse számára. A képtávolság $16-x$. A lencsetörvény szerint:

$$\frac{1}{-(2-x)}+\frac{1}{16-x}=\frac{1}{-2}.$$

A tárgytávolság azért negatív, mert virtuális tárgyról van szó. A gyújtótávolság negatív, mert a szemlencse szórólencse. Rendezve:

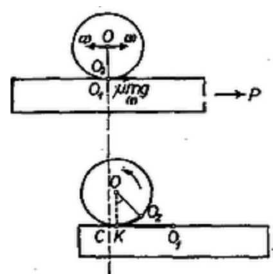
$$x^2-18x+4=0.$$

Megoldása: $x-9\pm\sqrt{77}$. Az egyik megoldás (17,77 cm) a szemlencsének az ernyő mögé való helyezését kívánná. A másik megoldás (0,22 cm) adja a használható eredményt.

3. *M tömegű, $2l$ hosszúságú hasáb közepén m tömegű golyó nyugszik. A nulla időponttól kezdve t ideig a hasábra állandó P húzóerő hat. Ekkor az erőhatás megszűnik. Az alaplap és a hasáb közötti súrlódás elhanyagolható. A golyó és a hasáb közötti csúszó súrlódás biztosítja, hogy a golyó meg ne csússzék, hanem gördüljön. Mekkora T idő múlva esik le a golyó a hasábról? (Mikor éri el a golyó a hasáb szélét?) A golyó gördülő ellenállása elhanyagolható.*

Megoldás: A golyó tömege m, rádiusza r, tehetetlenségi nyomatéka I, forgatásának szöggyorsulása β, középpontjának gyorsulása a vízszintes irányban végbemenő haladó mozgásánál a; a hasáb tömege M, gyorsulása A; az adott állandó erő P.

Vizsgáljuk a mozgás alakulását, ha a golyó és a hasáb közötti csúszó súrlódási együttható, nullától mindig nagyobb értékek felé növekszik. Ha $\mu=0$, akkor a hasáb nem képes a golyónak erőt átadni és a golyó mozdulatlanul marad ($a=0$), miközben a hasáb $A=P:M$ gyorsulással szalad el alatta.



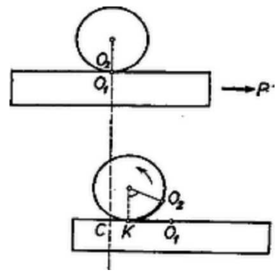
8. ábra

Most növeljük a súrlódási együtthatót egy bizonyos, kis μ értékre (8. ábra). Ekkor a golyó és a hasáb O_1-O_2 érintkezési pontján μmg súrlódási erő ébred, amely megmozgatja a golyót. A súrlódás révén a golyóra ható erő nem hat a golyó súlypontjában. Felveszünk két egyenlő nagy, ellentétes irányú, μmg nagyságú erőt a golyó középpontjában (2 és 3). Ez megengedhető, mert a hozzáadott két erő eredője nulla. Most átcsoportosítjuk ezeket az erőket: a golyó középpontjában ható μmg erő az m tömegű golyónak vízszintes irányban $a=\mu g$ gyorsulást ad (3), az 1. és 2. erők erőpárt alkotnak, amelynek erőkarja r, forgatónyomatéka μmrg. Ez az erőpár a golyót a forgómozgás alaptörvénye értelmében $\beta=\mu mrg/I$ szöggyorsulással forgatja. Az adott teljes P erőből a hasáb gyorsítására $P-\mu mg$ marad, tehát a hasáb gyorsulása

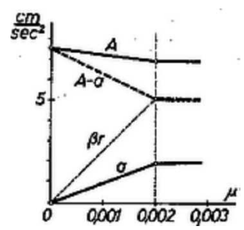
$$A=\frac{P-\mu mg}{M}. \qquad (1)$$

Tehát a hasáb A, a golyó középpontja a gyorsulással mozog jobb felé. Ez azt jelenti, hogy a golyó középpontjához képest a hasáb $A-a$ gyorsulással távozik. Ugyanakkor a golyó kerületi pontjai $\beta r=\mu mgr^2/I$ gyorsulással mozognak. Amikor μ súrlódási együttható kicsiny, akkor a kerületi pontok βr gyorsulása kisebb, mint a golyó és a hasáb közötti $A-a$ viszonylagos gyorsulás, ezért a golyó nem gördül simán a hasábon, hanem forgásában elmarad, csúszik. A 8. ábra alsó részén látható, hogy a hasáb közepén levő O_1 pont C-ből O_1-be jutott. Ugyanakkor a golyó középpontja CK darabbal jutott előbbre, de a μmg súrlódási erőből eredő forgatónyomaték csak $KOO_2\sphericalangle$-gel volt képes elforgatni, amitől az O_2 kerületi pont a KO_2 ívet írta le. KO_2 ív rövidebb, mint a hasáb és golyó KO_1 viszonylagos helyzetváltozása, így csúszás van, a hasáb elcsúszik a golyó alatt. A csúszás mértéke $A-a$ viszonylagos gyorsulás és βr kerületi gyorsulás különbsége:

$$A-a-\beta r. \tag{2}$$



9. ábra



10. ábra

Növeljük fokozatosan a súrlódási együtthatót. A golyó középpontjának a gyorsulása $a=\mu g$ függvény szerint lineárisan növekszik. A hasáb A gyorsulása (1) szerint lineárisan csökken. A 10. ábrán láthatók ezek az összefüggések. Magától értetődő, hogy $A-a$ viszonylagos gyorsulás (szaggatott vonal) ugyancsak csökken. Viszont nagyobb súrlódási együttható mellett növekszik a golyó forgásának szöggyorsulása és a kerületi pontok βr gyorsulása (pontozott vonal). Növelve a súrlódási együtthatót, feltétlenül eljutunk ahhoz az esethez, hogy egyenlővé válik a viszonylagos gyorsulás a kerületi pontok gyorsulásával. Ez azt jelenti, hogy már nincs csúszás, helyébe lép a golyó sima legördülése (a 9. ábrán látható; $KO_2=KO_1$.). Az ehhez szükséges súrlódási együtthatót megkapjuk, ha a (2)-vel kifejezett csúszás mértékét nullával tesszük egyenlővé:

$$A-a-\beta r=0.$$

Ide helyettesítjük βr helyébe $\mu g m r^2/I$-t, a helyébe μg-t és A helyébe az (1) alatti eredményt:

$$\frac{P-\mu g(m+M)}{M}-\frac{\mu g m r^2}{I}=0.$$

Innen a súrlódási együtthatónak az a kritikus értéke, amely elegendő a sima legördüléshez:

$$\mu_k=\frac{P}{Mg\left(1+\frac{m}{M}+\frac{mr^2}{I}\right)}.$$

Ezzel kifejezve a sima legördülés esetében a golyó középpontjának gyorsulása:

$$a=\frac{P}{M\left(1+\frac{m}{M}+\frac{mr^2}{I}\right)}. \tag{3}$$

a hasáb gyorsulása:

$$A=\frac{P\left(1+\frac{mr^2}{I}\right)}{M\left(1+\frac{m}{M}+\frac{mr^2}{I}\right)}, \tag{4}$$

a viszonylagos gyorsulás, illetve a kerületi pontok gyorsulása:

$$A-a=\beta r=\frac{P\cdot\frac{mr^2}{I}}{M\left(1+\frac{m}{M}+\frac{mr^2}{I}\right)}. \tag{5}$$

Ha a súrlódási együttható tovább növekszik a kritikus értéknél, minden ugyanúgy marad. Igaz, hogy μmg algebrai kifejezés értéke mindig nagyobb lesz, de ez a szorzat azt a lehetséges legnagyabb súrlódási erőt jelenti, amely létrejöhet, de nem biztos, hogy létrejön. A kísérletben tényleg fellépő a gyorsulást nagyobb μ mellett is (3) adja meg. Ennél nagyobb golyónak átadott erő olyan nagy gyorsulású forgást jelentene, hogy a golyó sima legördülés helyett a hasábon előrecsúszna. Ez azonban lehetetlen, mert a súrlódási erő olyan erő, amely akadályozza a mozgást, de nem képes előregurítani egy golyót. Nem szabad elfelejtenünk, a ($\mu \cdot$ erő) képlet azt a lehetséges legnagyobb súrlódási erőt adja meg, amely adott esetben keletkezhet, de egyáltalán nem jelenti azt, hogy mindig ekkora súrlódási erőnek kell fellépnie. A padlón álló láda esetében a működő súrlódási erő nulla. Ha túllépjük a μ_k súrlódási együtthatót, minden marad ugyanúgy. A feladat tulajdonképpeni megoldását a (3), (4) és (5) képletek jelentik, mert a feladatban akkora súrlódási erőt követeltek meg, hogy sima legördülés legyen.

A feladat tanulmányozására alkalmas numerikus feladat adatai lehetnek például: $m = 100$ gramm, $r = 2$ cm, $I = 160$ gcm^2, $M = 400$ gramm, $P = 3000$ din. Erre vonatkoznak a 10. ábra grafikonjai. A 8. ábra $\mu = 0{,}001$, a 9. ábra $\mu_k = 0{,}002$ súrlódási együttható mellett mutatja a golyó és hasáb helyzetét induláskor és 1 sec múlva.

A feladat többi kérdését is ezekhez az adatokhoz kapcsolódva vizsgáljuk meg. Legyen a hasáb fél hosszúsága $l = 40$ cm. A golyó középpontja $A - a = 5$ cm/sec^2 viszonylagos gyorsulással szalad a hasábon. A 40 cm-es táv megtételére

$$t_0 = \sqrt{\frac{2l}{A-a}} = 4 \text{ sec}$$

időre van szüksége. Ha az erő működésének ideje ennél több, például $t = 6$ sec, akkor a golyó leeséséhez szükséges időt t_0 adja meg. Ha az erő működésének ideje t_0-nál kevesebb, például $t = 2$ sec, akkor a golyó ezalatt gyorsulva megtesz $\frac{A-a}{2} \cdot t^2 = 10$ cm utat, és így marad még $l - \frac{A-a}{2} \cdot t^2 = 40 - 10 = 30$ cm. Ezt az utat a golyó $(A-a)t = 10$ cm/sec sebességgel egyenletesen futja be, tehát az egyenletes mozgás ideje $\tau = \left[l - \frac{A-a}{2} \cdot t^2\right] : (A-a)t = 3$ sec. A láda végének eléréséhez szükséges teljes idő $t + \tau = 5$ sec.