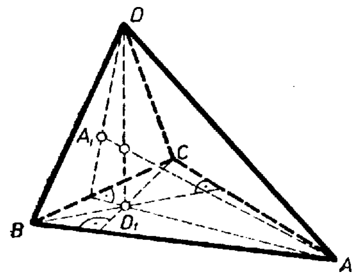
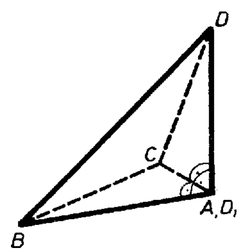
I. megoldás. 1. Megmutatjuk, hogy a föltétel szerinti tetraéder mindegyik éle merőleges a vele szemben levő élre. Elég ezt az $ABCD$ tetraédernek pl. DA, BC élpárjára bizonyítani, mert a kiemelt csúcs – legyen pl. D – mindhárom élpár egyik tagjának végpontja, a vele szemben fekvő lap pedig – most az ABC lap – tartalmazza mindegyik élpár egyik tagját.

Legyen D-nek az ABC lapon levő vetülete, egyben ennek a lapháromszögnek magasságpontja, D_1. Az utóbbi tulajdonság miatt AD_1 merőleges BC-re, az előbbi miatt pedig DD_1, hiszen ha DD_1 merőleges az ABC lap síkjára, akkor merőleges ennek minden egyenesére, köztük BC-re is. Így tehát merőleges BC-re a mondott két egyenes által meghatározott DD_1A sík is, és vele DA egyenese is, amint állítottuk (1. ábra).



1. ábra

Indokolásunk nem helyes akkor, ha D_1 egybeesik A-val (vagyis az alapháromszög A-nál derékszögű), mert ekkor D, D_1 és A nem határoz meg síkot (2. ábra).

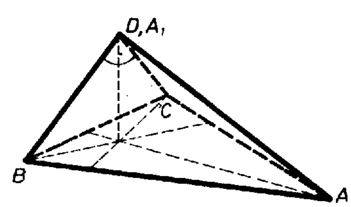


2. ábra

Állításunk azonban ekkor is *helyes*, sőt nyilvánvaló, hiszen ekkor már maga a DA él merőleges az ABC síkra. (A DA egyenes már nem határozatlan, $D \neq A$, különben nem lehetne beszélni gúláról.)

2. A feladat állítását is elég lesz most már egyetlen, a D-től különböző csúcsra bizonyítani, legyen ez A, és vetülete a BCD lapháromszög síkján A_1 (1. ábra). Eszerint az AA_1 egyenes, a bebizonyított segédtétel szerint pedig az AD él merőleges a BC élre, így az általuk meghatározott AA_1D sík minden egyenese, köztük DA_1 is. Eszerint A_1 rajta van a BCD háromszög D-ből induló magasságegyenesén.

Ugyanígy, D helyén pl. B-t véve, AB és AA, merőlegesek CD-re, ezért BA_1 is, így A_1 rajta van az ABC háromszög B-ből induló magasságegyenesén is, ekkor pedig magasságpontja a BCD háromszögnek.



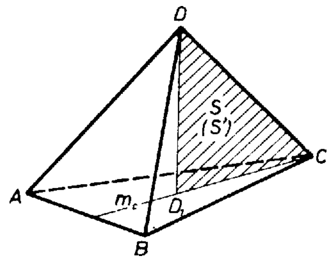
3. ábra

Amennyiben az ezen meggondolásunk első vagy második részében fölhasznált sík és egyenes nem volna határozott, pl. az első részben az AA_1D sík és a DA_1 egyenes határozatlan volna, mert A_1 egybeesik D-vel (3. ábra), akkor a meggondolás másik – a példát folytatva a második – része biztosan érvényes, hiszen A, nem eshet egybe D-vel is és B-vel is, és a „$DC \perp BA_1$" megállapítás így alakul: $CD \perp BD$, vagyis a BCD háromszög D-nél derékszögű. Így pedig magasságpontja maga D, azaz A_1.

Megjegyzés. Az 1. ábra esetében – ha ti. D_1 nem esik egybe az ABC háromszög egyik csúcsával sem, akkor – a tetraéder DD_1, AA_1 magasságvonalai mint a DD_1A sík egyenesei, metszik egymást, és ez érvényes bármely két magasságra, tehát a tetraéder 4 magasságvonala egy pontban metszi egymást (ortocentrikus, azaz magasságponttal bíró tetraéder, más néven normáltetraéder). A 2. ábrán A, a 3. ábrán D a magasságpont – a két eset lényegében azonos – és 3 lap derékszögű háromszög. (A tetraéder magasságvonalai általában nem metszik egymást.)

II. megoldás. Első lépésként bebizonyítjuk a következő segédállítást: *az $ABCD$ tetraéder D csúcsának az ABC lapon levő D_1 vetülete akkor és csakis akkor van az ABC lap C csúcsához tartozó m_c, magasságvonalán, ha $AB \perp$ $\perp CD$.*

a) Ha $AB \perp CD$, akkor a CD és m_c egyenesek által meghatározott S sík merőleges AB-re, hiszen e sík két meghatározó egyenese AB-re merőleges (4. ábra).



4. ábra

(E két egyenes különböző, mert m_c, benne van az ABC síkban, CD viszont nincs benne.) AB tehát merőleges az S sík minden egyenesére. Legyen D^* a D pont vetülete az m_c egyenesen, ekkor $DD^* \perp AB$. Viszont DD^* merőleges m_c-re is, tehát ez az egyenes merőleges az ABC sík két (egymástól különböző) egyenesére, így merőleges az ABC síkra is, vagyis D^* azonos D_1-gyel, más szóval D_1 rajta van m_c-n.

b) Fordítva, ha D_1 rajta van m_c-n, akkor a DD_1m_c egyenesek által meghatározott S' merőleges AB-re, hiszen DD_1 merőleges az ABC sík minden egyenesére, így AB-re is, és nyilván $m_c \perp AB$. (m_c és DD_1, különbözők, mert m_c benne van az ABC síkban, DD_1 pedig nincs benne.) Az AB egyenes tehát merőleges S' minden egyenesére, így CD-re is. Ezt akartuk bizonyítani.

Ha mármost a tetraéder egyik csúcsának a szemközti lapon levő vetülete e lap magasságpontja, vagyis e lap mindhárom magasságvonalán rajta van, akkor segédállításunk *b)* része szerint – a betűzést értelemszerűen változtatva – a tetraédernek mind a három szemközti (kitérő) élpárja merőleges egymásra. Így pedig – segédállításunk *a)* része szerint – tetszőleges csúcsának a szemközti lapon levő vetülete rajta van e lap mindhárom magasságvonalán, tehát azonos e lap magasságpontjával.