Az első 12 természetes szám négyzetösszege az ismert összefüggés alapján

$$\frac{12 \cdot 13 \cdot (12+13)}{6} = 650,$$

e számokat tehát a feladat szerint két csoportba osztva a négyzetek összege mindegyik csoportban 325. Megvizsgáljuk, hány páratlan szám lehet egy csoportban. Egy páratlan szám négyzete 4-gyel osztva 1-et ad maradékul, a párosok négyzete osztható 4-gyel, ha tehát az egy csoportba tartozó négyzetszámokat elosztjuk 4-gyel, a maradékok összege egyenlő lesz a páratlanok számával: és ezt ismét 4-gyel osztva ugyanannyi maradékot kapunk, mintha az összegüket osztanánk 4-gyel. Az összegük 325, ez 4-gyel osztva 1-et ad maradékul, a páratlanok száma tehát 1 vagy 5 lehet. 6 páratlan számunk van, ezek közül az egyik csoportba 5, a másikba 1 fog tartozni. Azt a csoportot fogjuk előállítani, amelyik 5 páratlan számot tartalmaz.

A 6 páratlan négyzetszám összege 286, tehát a 325-höz hiányzó 39 és az elhagyandó páratlan négyzetszám összegét kell egy vagy több páros négyzetszámmal kipótolnunk. Ha az 1-et hagyjuk el (tesszük a másik csoportba), ez a hiány 40. A pótlást adó páros számok fele szintén egész, és ha mindegyiknek a felét vesszük, négyzetösszegük az eredeti összeg negyede, esetünkben 10 lesz. Ezt különböző négyzetszámok összegeként előállítva, ezek között a legnagyobb csak a 3 négyzete lehet, hiszen $4^2 > 10$; viszont 2 még kevés: $2^2 + 1^2 < 10$. A $10 - 3^2$ maradék éppen 1^2, tehát ebben az esetben megoldást kapunk.

Hasonlóan vizsgáljuk meg a többi páratlan szám elhagyásának esetét is, (Az előbbi – közvetlenül is látható – felbontást azért részleteztük, hogy a módszer követhető legyen.) Ha a 3^2-t hagyjuk el, a hiány 48, az azt pótló páros számok felének négyzetösszege 12, így a legnagyobb ismét csak 3^2 lehetne, de a további 3 nem állítható elő különböző négyzetszámok összegeként, ilyen megoldás nincs.

Ha 5^2-t hagyjuk el, a hiány 64, a felek négyzetösszege 16. A legnagyobb szám csak a 4^2 lehet, hiszen 5 sok ($5^2 > 16$) 3 kevés ($3^2 + 2^2 + 1^2 < 16$). A 4-es természetesen jó, ismét megoldást kaptunk.

Ha 7^2-t hagyjuk el, a hiány 88, a felek négyzetösszege 22, a legnagyobb szám ismét csak 4^2 lehetne, a visszamaradó 6 azonban nem állítható elő különböző négyzetszámok összegeként.

Ha 9^2-t hagyjuk el, a hiány 120, a felek négyzetösszege 30, a legnagyobb szám legfeljebb 5^2 ($6^2 > 30$) és legalább 4^2 ($3^2 + 2^2 + 1^2 < 30$). Ha 5^2-t vesszük legnagyobbnak, a visszamaradó 5 egyértelműen állítható elő $2^2 + 1^2$ alakban, ha pedig 4^2-t, akkor a visszamaradó 14 egyértelműen $3^2 + 2^2 + 1^2$.

Végül ha 11^2-t hagyjuk el, a hiány 160, a felek négyzetösszege 40, a csoport legnagyobbja 6^2 vagy 5^2 lehet, az első esetben 4 marad hátra és ez 2^2, a második esetben 15, ez nem állítható elő különböző négyzetszámok összegeként.

Mindezek szerint a két csoportba osztás 5-féleképpen lehetséges.

Kérchy László (Baja, III. Béla Gimn., III. o. t.)

Megjegyzések. 1. Ide iktatjuk a talált 5 kettéosztásnak az 5 páratlan számot tartalmazó csoportját:

(I) $3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 + 11^2 + 6^2 + 2^2,$

(II) $1^2 + 3^2 + 7^2 + 9^2 + 11^2 + 8^2,$

(III) $1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 11^2 + 10^2 + 4^2 + 2^2,$

(IV) $1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 11^2 + 8^2 + 6^2 + 4^2 + 2^2,$

(V) $1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 + 12^2 + 4^2.$

A II. kettéosztásban a tagok száma $6-6$, és a négyzetek alapjaiból képezett összegek is egyenlők.

2. A legtöbb dolgozat az adott összes négyzetszámok nagyságviszonya alapján adta meg a csoportosításokat, abból kiindulva, hogy $10^2 + 11^2 + 12^2 > 325$, ez a 3 szám nem állhat egy csoportban. Így több próbálgatásra volt szükség.

3. Ha azt is előírjuk, hogy a két csoport hatot-hatot tartalmazzon az adott négyzetszámok közül, akkor a páratlanok közül különválasztott szám alapját x-szel, a helyére hozandó párosnak az alapját y-nal jelölve

$$286 - x^2 + y^2 = 325, \qquad (y-x)(y+x) = 39 = 1 \cdot 39 = 3 \cdot 13,$$

és az utóbbi felbontásból $y = 8$, $x = 5$ (az elsőből $y > 12$).