I. Megoldás. Legyenek a polinom zérushelyei x_1, x_2 úgy, hogy $|x_1| \leqq |x_2|$, így $ab \neq 0$ miatt mindenesetre $|x_2| > 0$. A gyökök szimmetrikus függvényei alapján $c = ax_1x_2$, $b = -a(x_1 + x_2)$, ezeket kifejezésünkbe behelyettesítve

$$2 \cdot \left|\frac{c}{b}\right| = \frac{2|x_1| \cdot |x_2|}{|x_1 + x_2|} \geq \frac{2|x_1| \cdot |x_2|}{|x_1| + |x_2|} \geq \frac{2|x_1| \cdot |x_2|}{2|x_2|} = |x_1|,$$

amit bizonyítanunk kellett. Felhasználtuk, hogy összeg absz. értéke legföljebb akkora, mint tagjai absz. értékének összege (akkor ennyi, ha mindegyik tag előjele egyenlő, ideértve az esetleges 0 tagokat is), továbbá hogy a számláló nem negatív.

Péter Erika (Dombóvár, Gőgös I. Gimn., III. o. t.)
Tarsó Béla (Veszprém, Lovassy L. Gimn., II. o. t.)

Megjegyzések. 1. Az állítás $a = 0$ esetén is érvényes, ekkor az egyetlen gyökre

$$|x_1| = \left|-\frac{c}{b}\right| \leq 2 \cdot \left|\frac{c}{b}\right|.$$

2. Nem használtuk ki, hogy a gyökök valósak, bizonyításunk komplex gyökök, komplex együtthatók esetére is érvényes.

II. megoldás. Ha az $f(x) = ax^2 + bx + c$ polinom gyökei valósak, akkor a feladat állításánál valamivel több is igaz: az egyenletnek van az $x = 0$, $x = -\dfrac{2c}{b}$ végpontok által közrefogott (a $c = 0$ esetben egyetlen pontot tartalmazó) zárt intervallumban gyöke. E helyeken ugyanis $f(x)$ értéke

$$f(0) = c, \quad \text{ill.} \quad f\left(-\frac{2c}{b}\right) = c \cdot \frac{4ac - b^2}{b^2}.$$

Ha tehát $4ac - b^2 = 0$, akkor a polinom egyetlen gyöke $-\dfrac{2c}{b}$. Ha pedig $4ac - b^2 \neq 0$, akkor amennyiben vannak valós gyökök, azok különbözők, és $4ac - b^2 < 0$. E két gyök $c = 0$ esetén a 0 és $-\dfrac{2c}{b}$ szám, ha pedig $c \neq 0$, akkor a 0 és $-\dfrac{2c}{b}$ helyeken felvett függvényértékek ellentétes előjelűek, tehát $f(x)$-nek van köztük gyöke.

Czédli Gábor (Baja, III. Béla Gimn., III. o. t.)
Kirchner Imre (Budapest, Steinmetz M. Gimn., III. o. t.)

III. megoldás. A másodfokú egyenlet gyökképletéből akkor kapjuk a kisebb absz. értékű gyököt, ha $-b$ és a négyzetgyök ellentétes előjelű, így

$$|x_1| = \left|\frac{|b| - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right| = \left|\frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{2a(|b| + \sqrt{b^2 - 4ac})}\right| = \left|\frac{2c}{|b| + \sqrt{b^2 - 4ac}}\right| \leqq \left|\frac{2c}{b}\right|.$$

Bővítettük a tört kifejezést a számláló konjugáltjával, majd a nevező második tagját elhagytuk. Az utolsó lépésből azt is látjuk, hogy egyenlőség egyrészt a $c = 0$, másrészt a $b^2 - 4ac = 0$ esetben áll fenn, más szóval ha $x_1 = 0$, ill. ha $x_1 = x_2 \neq 0$.

Nyilánszky Mihály (Miskolc, Földes F. Gimn., III. o. t.)