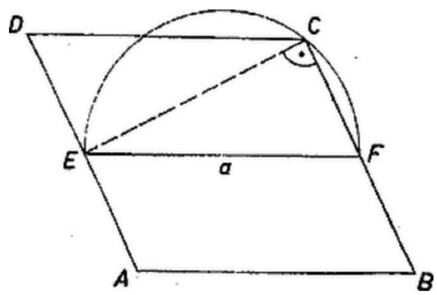
1. feladat. *Egy egyenlő szárú trapéz párhuzamos oldalainak hossza a és b, egyik szára felezőpontjának a másik szárra való vetülete ennek a szárnak egyik végpontjába esik. Számítsuk ki a trapéz területét.*

Megjegyzés: Egyenlő szárú trapézon olyant szokás érteni, amely szimmetrikus a párhuzamos oldalakra merőleges tengelyre nézve, és az alábbiakban mi is ezt fogjuk érteni rajta. Az elnevezés jelentése szerint minden paralelogramma is trapéz egyenlő szárakkal (és egyenlő párhuzamos oldalakkal). Így ha $a = b$, és a paralelogrammákat is tekintetbe vesszük, akkor egy a hosszúságú EF szakasz mint átmérő fölé rajzolt félkör bármely pontjából mint egyik csúcsból rajzolva olyan paralelogrammát, amelyiknek EF középvonala, a feltételeknek megfelelő, „egyenlő szárú trapéz”-t kapunk, a terület tehát határozatlan. Így csak érdektelen eseteket zártunk ki. Az $a = b$ esetet is kizárhatjuk, mert ebben az esetben az elfogadott értelmezés mellett trapézunk téglalap, és így mindegyik oldal felezőpontjának vetülete a szemben levő oldalon annak a felezőpontja.



1. ábra

I. megoldás. Ha a-t és b-t ismerjük, akkor elég a magasság meghatározása a terület kiszámításához. Ehhez tájékozódunk először a trapéz alakjáról. Legyen a DA szár felezőpontja E, vetülete a BC száron a C csúcs. Ekkor E a BCD szögtartomány belsejében van, s így

$$DCB\sphericalangle > ECB\sphericalangle = 90°,$$

tehát C-nél és a szimmetria folytán D-nél is tompa szög van. Így, ha $a > b$, akkor $AB = a$, $CD = b$.

Tükrözzük a CDE háromszöget az E pontra. Ekkor a D pont A-ba kerül, C pedig a CE és BA szakaszok meghosszabbításainak C' metszéspontjába. Így a trapéz t területe egyenlő a BCC' derékszögű háromszögével. Jelöljük a C pont vetületét AB-n M-mel és CM-et m-mel, így

$$t = \frac{BC' \cdot m}{2},$$

és, felhasználva a derékszögű háromszög magasságának mértani közép tulajdonságát,

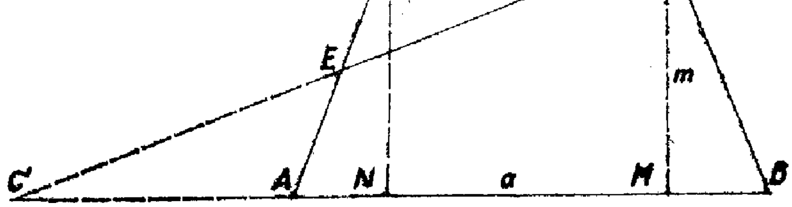
$$m^2 = BM \cdot C'M, \quad \text{ahol} \quad BC' = a + b.$$

BM meghatározására tekintsük a D pont N vetületét is az AB oldalon. Egyrészt $MN = b$, másrészt a szimmetria miatt $AN = BM$ és mivel a kettő együtt a párhuzamos oldalak különbségét adja, így

$$BM = \frac{a-b}{2}, \quad C'M = a + b - \frac{a-b}{2} = \frac{a+3b}{2},$$
$$m = \frac{\sqrt{(a-b)(a+3b)}}{2},$$

és a trapéz területe

$$t = \frac{(a+b)\sqrt{(a-b)(a+3b)}}{4}.$$

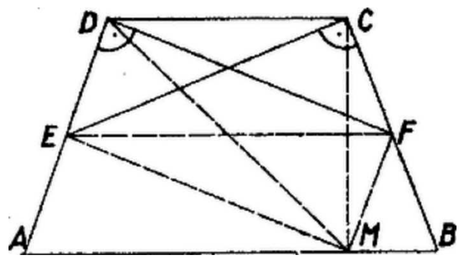


2. ábra

II. megoldás. Az m magasság meghatározására vegyük figyelembe, hogy a trapéz szimmetriája folytán a BC szár F felezőpontjának az AD száron a vetülete a D csúcs, a CEF és DFE derékszögű háromszögek egybevágók. Tükrözzük a CEF háromszöget EF-re. Mivel a középvonal AB-től és CD-től egyenlő távol fut, velük párhuzamosan, így C tükörképe az AB-n levő M vetülete. A $DEMF$ négyszög szemben fekvő oldalai egyenlők, így a négyszög paralelogramma, éspedig téglalap, mert D-nél (és M-nél) levő szögéről tudjuk, hogy derékszög. Ennek folytán átlói egyenlők: $DM = EF = (a+b)/2$, és a CDM derékszögű háromszögből

$$m^2 = CM^2 = DM^2 - CD^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - b^2 = \frac{(a+3b)(a-b)}{4}.$$

Megjegyzés: Több más út is választható m meghatározására, vagy kiszámíthatjuk a BC szár hosszát és annak ismeretében az I. megoldásban szereplő BCC' háromszög CC' befogóját, a területet pedig a $t = BC \cdot CC'/2$ összefüggésből. A fenti két számítás látszik még legegyszerűbbnek.



3. ábra

2. feladat. *Egy kétjegyű számhoz adjuk hozzá számjegyeinek összegét, majd az így nyert számhoz újra adjuk hozzá számjegyeinek összegét. Így olyan kétjegyű számhoz jutunk, melynek jegyei az eredeti szám jegyei, fordított sorrendben. Melyik ez a szám?*

I. megoldás. Jelöljük a keresett számot így: $N = \overline{xy} = 10x + y$, itt $x \geq 1$, mert a szám kétjegyű. Hozzáadva N-hez a számjegyek $x+y$ összegét az

$$N_1 = 10x + y + (x+y) = 11x + 2y$$

összeg utolsó jegye az $M = x + 2y$ szám utolsó jegye lesz, első jegye pedig x-nél M tízes jegyével nagyobb. Jelöljük ezt a jegyet k-val, erre $0 \leq k \leq 2$, mert $M \leq 3 \cdot 9 = 27$.

M és vele együtt N_1 utolsó jegye $M - 10k = x + 2y - 10k$, N_1 első jegye $x + k$, így N_1 jegyeinek összege $x + k + x + 2y - 10k = 2(x+y) - 9k$. Ezt N_1-hez adva a keletkező N_2 számnak a jegyek felcserélésével keletkező $10y + x$ számnak kell lennie:

$$N_2 = 11x + 2y + 2(x+y) - 9k = 13x + 4y - 9k = 10y + x.$$

Innen

$$6y + 9k = 12x, \qquad 2y + 3k = 4x.$$

Itt $3k$ és vele együtt k is csak páros lehet, tehát k értéke 0 vagy 2.

Ha $k = 0$, akkor $y = 2x$, N jegyeinek összege $x + 2y = 5x$ egyjegyű, tehát $x = 1$, $y = 2$, és $N = 12$ megfelel a feladat feltételeinek, mert

$$N_1 = 12 + 1 + 2 = 15, \qquad N_2 = 15 + 1 + 5 = 21.$$

Ha $k = 2$, $y = 2x - 3$, N jegyeinek összegére

$$20 \leq x + 2y \leq 3 \cdot 9 = 27, \qquad 20 \leq 5x - 6 \leq 27, \qquad 26 \leq 5x \leq 33.$$

Eszerint csak $x = 6$ lehetséges, így $y = 9$, és $N' = 69$ szintén megoldása a feladatnak, mert rá $N_1' = 69 + 6 + 9 = 84$, $N_2' = 84 + 8 + 4 = 96$.

II. megoldás. Jelöljük a keresett $10x + y$ számból a jegyei hozzáadásával keletkező szám jegyeit a, b-vel:

$$10x + y + x + y = 11x + 2y = 10a + b.$$

Feltétel szerint ehhez hozzáadva jegyeit a $10y + x$ számot kapjuk:

$$10a + b + a + b = 11a + 2b = 10y + x.$$

A két összefüggésből kiküszöböljük x-et:

$$\begin{aligned} 11(10y + x) - (11x + 2y) &= 108y \\ &= 11(11a + 2b) - (10a + b) = 111a + 21b. \end{aligned}$$

Innen

$$36y = 37a + 7b, \qquad y = a + \frac{a+7b}{36}.$$

Itt az utolsó tört számlálója osztható kell hogy legyen 36-tal, mert y egész, továbbá a legfeljebb 8, mert y nála nagyobb és számjegy. Így $a + 7b \leq 8 + 7 \cdot 9 = 71$, tehát $a + 7b = 36$ kell hogy legyen. Innen

$$b = 5 - \frac{a-1}{7}.$$

Ez csak úgy lehet egész, ha $a - 1$ osztható 7-tel, ami a számjegyek közül csak $a = 1$ és $a = 8$-ra következik be; b megfelelő értékei 5 és 4. A keresett szám jegyeinek felcserélésével keletkező szám ekkor $11a + 2b = 21$, ill. 96, a keresett szám tehát 12 és 69 lehet, és mindkettő kielégíti a feladat feltételeit.

III. megoldás. Megmutatjuk, hogy a keresett szám 3-mal osztható. Legyen ugyanis a szám maradéka 9-cel osztva r, akkor, mint tudjuk, jegyeinek összege is r maradékot ad 9-cel osztva, s így a jegyek hozzáadásával keletkező szám ugyanannyi maradékot ad 9-cel osztva, mint $2r$, és ugyanennyi maradékot ad a jegyeinek összege is. Ha tehát a keletkezett számhoz újra hozzáadjuk a jegyeinek összegét, az így kapott szám ugyanannyi maradékot ad 9-cel osztva, mint $4r$. Másrészt ez a szám a keresett számból a jegyek felcserélésével kapható, tehát ugyanannyi maradékot ad 9-cel osztva, mint az: r-et. Így $4r$-et 9-cel osztva a maradék r, vagyis $3r$ osztható 9-cel, r osztható 3-mal, tehát a keresett szám is.

Másrészt korlátokat keresünk a szám jegyeire. A keresett számot $10x+y$-nal jelölve a kétszeri hozzáadással keletkező szám, amely a jegyek felcserélésével írható, $10y + x$, a növekedés

$$10y + x - (10x + y) = 9(y - x).$$

Ez egyrészt 9-cel osztható, másrészt pozitív, tehát $x < y$. Ez a növekedés a keresett számból 4 számjegy hozzáadásával keletkezik, melyek közt van legalább két különböző (x és y), így összegük legfeljebb $3 \cdot 9 + 8 = 35$ lehet, tehát

$$9(y - x) \leq 35, \qquad \text{így} \qquad y - x \leq 3,$$

a keresett szám jegyeire tehát

$$x < y \leq x + 3.$$

Ilyen tulajdonságú kétjegyű, 3-mal osztható számok a következők:

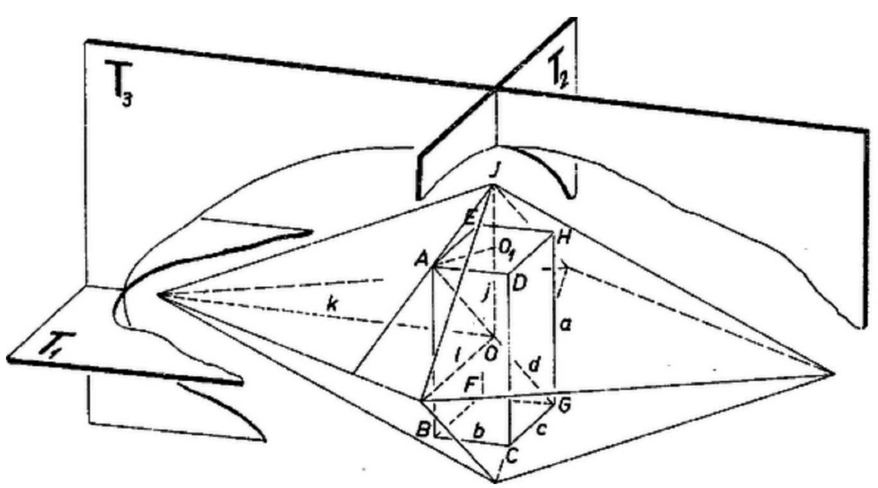
$$12,\ 24,\ 36,\ 45,\ 57,\ 69,\ 78.$$

Ezeket kipróbálva adódik, hogy 12 és 69 a feladat megoldásai.

3. feladat. *Egy téglatest egy csúcsába összefutó három élének hossza a, b, c. Állítsunk merőleges síkot mindegyik csúcsán át az oda befutó testátlóra és tekintsük azt a konvex testet, amelyet az így kapott síkok bezárnak. Mennyi e test felszíne és térfogata?*

Megoldás. Jelöljük a tégla csúcsait A, B, C, D, E, F, G, H-val ($ABCD$ egy határlap és $AE \| BF \| CG \| DH$); a, b, c legyen rendre az AB, AD, AE élek hossza. A testátlók hosszát jelöljük d-vel, a tégla középpontját O-val; tudjuk, hogy $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Állapítsuk meg először az átlókra merőleges síkok közt keletkező T test alakját. Az AB, AD, AE élek T_1, T_2, T_3 felező merőleges síkjaira tükrözve a téglát, az önmagába megy át, testátlói ismét testátlókba, így az azokra merőleges síkok is egymásba mennek át, tehát a T test is szimmetrikus T_1, T_2, T_3-ra.



4. ábra

A szimmetriasíkok létesítette térnyolcadok mindegyike egy téglacsúcsot tartalmaz. Az ebben a megfelelő testátlóra merőlegesen állított sík a szimmetriasíkokkal egy-egy 3-oldalú gúlát határoz meg, melynek egyik csúcsa O, és az ebben találkozó lapjai, amelyek a szimmetriasíkokban vannak, páronként merőlegesek. A testátlóra merőleges sík valóban a szimmetriasíkok metszésvonalainak a térnyolcadot határoló félegyeneseit metszi, mert a testátló átmegy O-n, ami a félegyenesek közös pontja és hegyes szöget alkot a félegyenesekkel. Egy ilyen gúla a szimmetriasíkokra való tükrözéssel sorra átvihető az összes többibe, és a 8 gúla együttesen alkotja T-t, amelynek határfelülete így 8 egybevágó háromszögből áll, élei a szimmetriasíkokban vannak, csúcsai ezek metszésvonalain.

Könnyű belátni (ezt számításainkban nem fogjuk felhasználni), hogy az egy szimmetriasíkban levő élek egy-egy rombuszt alkotnak, ezen mint alapon nyugvó két egyenes gúlából tevődik össze T. Az ilyen testet a kristálytanban rombos bipiramisnak nevezik.

T térfogata a szimmetriasíkok közti egy nyolcadba eső háromoldalú gúla térfogatának 8-szorosa, felszíne pedig a téglacsúcson átmenő határlap t területének 8-szorosa. Jelöljük a szóban forgó gúlának a tégla AB, AD, AE éleivel párhuzamos éleinek hosszát j, k, l-lel, akkor térfogatát kétféle úton is kiszámíthatjuk: mint a merőleges élek hossza szorzatának a hatodát, és mint t-nek és a rá merőleges téglaátló felének 1/3-szoros szorzatát:

$$\frac{1}{6}jkl = \frac{1}{6}d \cdot t.$$

Így T térfogatára, V-re, ill. felszínére, F-re

$$V = \frac{8}{6}jkl = \frac{4}{3}jkl \qquad \text{és} \qquad F = 8t = 8\frac{jkl}{d},$$

tehát a kettő között a következő összefüggés áll fenn:

$$F = \frac{6V}{d}.$$

Elég tehát F és V egyikét meghatározni. V-t lesz könnyebb, illetőleg a kiszámításához szükséges j, k, l szakaszokat.

Jelöljük az A-t tartalmazó ternegyedbe eső gúla j hosszúságú élének O-tól különböző végpontját J-vel, az él metszéspontját az $ADHE$ lappal (e lap középpontját) O_1-gyel. Ekkor $OO_1 = a/2$, továbbá JA az OA-ra A-ban emelt merőleges sík egy egyenese, s így merőleges OA-ra. Az AJO és O_1AO derékszögű háromszögek hasonlók, mert O-nál levő hegyesszögük közös; így

$$\frac{j}{d/2} = \frac{OJ}{OA} = \frac{OA}{OO_1} = \frac{d/2}{a/2}, \qquad j = \frac{d^2}{2a} = \frac{a^2+b^2+c^2}{2a}.$$

Ugyanígy látható, hogy

$$k = \frac{d^2}{2b}, \qquad l = \frac{d^2}{2c}.$$

Így a keresett mennyiségek

$$V = \frac{4}{3} \cdot \frac{d^6}{8abc} = \frac{1}{6} \cdot \frac{(a^2+b^2+c^2)^3}{abc},$$
$$F = \frac{6V}{d} = \frac{d^5}{abc} = \frac{\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)^5}{abc}.$$

Lukács Ottó, Surányi János