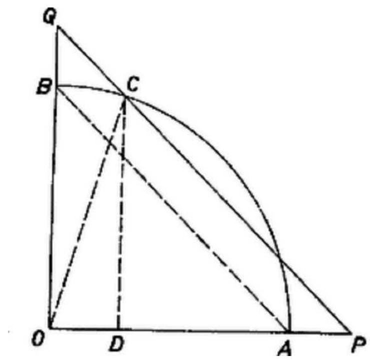
Haladók (II.osztályosok) *versenye*

1. feladat. *Adott egy negyedkör, amelyet az OA és OB sugarak határolnak. Húzzunk az AB húrral párhuzamos, a negyedkört metsző egyenest és jelöljük ennek a negyedkörrel alkotott egyik metszéspontját C-vel, az OA és OB félegyenesekkel alkotott metszéspontjait pedig P-vel és Q-val. Bizonyítsuk be, hogy*

$$AB^2 = PC^2 + QC^2. \tag{1}$$

I. megoldás. Elég megmutatni, hogy a megfelelő összefüggés fennáll a szóban forgó szakaszoknak az OA egyenesen levő vetületére. Ugyanis mindegyik vetület ugyanannyiad része (esetünkben $1/\sqrt{2}$-szöröse) az eredeti szakasznak, és így a szakaszokat a vetületekkel helyettesítve (1) mindkét oldala ugyanazzal, a mondott arány négyzetével szorzódik.



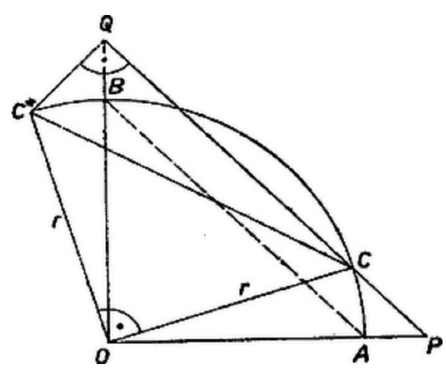
1. ábra

Az AB, CP, CQ szakaszok vetülete $AO = r$, (a kör sugara), DP és DO, továbbá, mivel a CDP háromszög egyenlő szárú, így $DP = DC$, tehát a vetületekre

$$DP^2 + DO^2 = DC^2 + DO^2 = OC^2 = r^2 = OA^2,$$

mivel a CDO háromszög derékszögű. Fennáll tehát a bizonyítandó összefüggés is.

II. megoldás. Forgassuk el a kör középpontja körül a QP szakaszt a C ponttal együtt 90°-kal úgy, hogy a P pont a Q pontba kerüljön, és az elforgatott C pontot jelöljük C^*-gal. Ekkor a C^*CQ háromszög Q-nál fekvő szöge derékszög, és $QC^* = PC$. Másrészt a $C^*OC\sphericalangle = 90°$, így $C^*C = r\sqrt{2}$. Eszerint az (1) összefüggés éppen a C^*CQ derékszögű háromszögre felírt Pythagoras-tétel.



2. ábra

Megjegyzés. Állításunk akkor is érvényes, ha megrajzolva a teljes O középpontú, r sugarú kört, az AB-vel párhuzamos szelő ezt a negyedkörön kívül eső C pontban metszi. Mindkét előbbi megoldás alkalmas ennek bebizonyítására is.

2. feladat. *Bizonyítsuk be, hogy az*

$$\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}$$

kifejezés mindig pozitív, ha a, b és c különböző számok, és közülük az „a” a legnagyobb, és a c pedig a legkisebb.

I. megoldás. A törteket közös nevezőre hozzuk és összeadjuk. Elvégezve a lehetséges összevonásokat nyerjük, hogy

$$\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} = \frac{ab + bc + ca - a^2 - b^2 - c^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}.$$

A jobb oldali tört számlálója ilyen alakban írható:

$$-\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2].$$

A szögletes zárójelben a négyzetösszeg pozitív, tehát maga a számláló negatív. De a nevező első két tényezője pozitív, a harmadik negatív, ezért a nevező szintén negatív, így a tört értéke pozitív.

II. megoldás. Az $a>b>c$ kikötés miatt az első két tört pozitív, a harmadik negatív. A harmadik tört nevezőjének abszolút értéke $a-c=(a-b)+(b-c)$, az első két nevező összege; eszerint reciproka, vagyis a harmadik tag abszolút értéke kisebb $\frac{1}{a-b}$ és $\frac{1}{b-c}$ mindegyikénél, még inkább kisebb e két tört összegénél.

3. feladat. *Bizonyítsuk be, hogy ha*

$$p+q+r=1 \tag{2}$$

és

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=0, \tag{3}$$

akkor

$$a^2+b^2+c^2=(pa+qb+rc)^2+(qa+rb+pc)^2+(ra+pb+qc)^2. \tag{4}$$

Megoldás. A jobb oldalon elvégezve a négyzetreemelést, a keletkező 9 négyzetes tag és 9 kettős szorzat így csoportosítható:

$$\begin{gathered}a^2(p^2+q^2+r^2)+b^2(p^2+q^2+r^2)+c^2(p^2+q^2+r^2)+\\+2ab(pq+qr+rp)+2bc(pq+qr+rp)+2ca(pq+qr+rp).\end{gathered} \tag{5}$$

A feltételi egyenlőségekből meghatározzuk a $p^2+q^2+r^2$ négyzetösszeg és a $pq+qr+rp$ szorzatösszeg értékét. Miután (3) értelmében p, q és r egyike sem nulla, (3)-at végigszorozhatjuk pqr-rel:

$$qr+rp+pq=0. \tag{6}$$

Továbbá emeljük négyzetre (2)-t:

$$p^2+2pq+q^2+2pr+2qr+r^2=1.$$

Ámde a bal oldalon a kettős szorzatok összege (6) szerint 0, így

$$p^2+q^2+r^2=1. \tag{7}$$

(6) és (7) értékét behelyettesítve (5)-be, ott a négyzetes tagok együtthatója 1, a kettős szorzatok pedig kiesnek, és így a kifejezés azonosan egyenlő (4) bal oldalával.

Lőrincz Pál