Kezdők (I. osztályosok) *versenye*

1. feladat. *Két szám legkisebb közös többszöröse* 19*-cel nagyobb, mint a legnagyobb közös osztójuk. Mi lehet ez a két szám?*

Megoldás. Keressük a pozitív egész megoldásokat. Jelöljük a keresett két szám legkisebb közös többszörösét t-vel, a legnagyobb közös osztót d-vel. A legkisebb közös többszörös osztható a számok mindegyikével, s így legnagyobb közös osztójukkal is, tehát a $t-d$ különbség, ami a feladat feltétele szerint 19, osztható d-vel. Mivel 19 prímszám, (pozitív) osztója csak 1 és 19, csak ezek jönnek tehát tekintetbe d gyanánt.

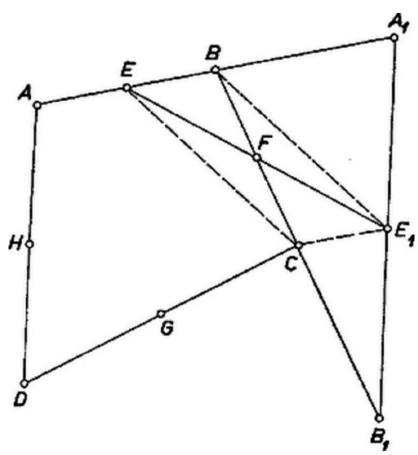
Ha $d=1$, akkor $t=1+19=20$ a két keresett szám legkisebb közös többszöröse, és a számok relatív prímek, így a legkisebb közös többszörösük a szorzatuk. 20 két egymáshoz relatív prím tényezőre való felbontásai (a tényezők sorrendjétől eltekintve) $1\cdot 20$ és $4\cdot 5$, tehát 1, 20 és 4, 5 két megfelelő számpár.

Ha $d=19$, akkor $t=38$, így a két szám 19 többszöröse és 38 osztója, tehát 19 vagy 38. A két szám nem lehet egyenlő, mert akkor $t-d=0$ lenne, a 19, 38 számpár viszont megfelel a feladat feltételeinek. – Így 3 pozitív egészekből álló számpár elégíti ki a feladat követelményeit.

Ha negatív egészeket is tekintetbe veszünk, akkor azok a számpárok felelnek meg, amelyek a fentiekből az egyik, vagy mindkét szám előjelének a megváltoztatásával keletkeznek, ugyanis egy számnak és a negatívjának ugyanazok a többszörösei és ugyanazok az osztói. Így két számnak a legkisebb közös többszöröse és legnagyobb közös osztója ugyanaz, mint a két szám abszolút értékéé.

Megjegyzés. Sok versenyző csak felírt egy vagy két megoldást, vagy mind a hármat is, de minden indokolás nélkül. Ezek mellett lehetne a feladatnak még akárhány további megoldása is. Lényeges matematikai gondolatot éppen annak a belátása igényelt, hogy a fenti 3 számpár az összes megoldást megadja.

2. feladat. *Adott egy $ABCD$ négyszög. Tükrözzük A-t B-re, B-t C-re, C-t D-re, D-t A-ra, és legyenek a tükörképek rendre A_1, B_1, C_1, D_1. Járjunk el hasonlóan azzal a négyszöggel, melynek csúcsai sorra az AB, BC, CD, DA oldalak felezőpontjai. Bizonyítandó, hogy az így kapott tükörképek az $A_1B_1C_1D_1$ négyszög oldalainak felezőpontjai.*



Megoldás. Elegendő az $ABCD$ és az $A_1B_1C_1D_1$ négyszög egy-egy megfelelő oldalának, pl. az AB és A_1B_1 oldalnak az E és E_1 felezőpontját összekötő szakaszról kimutatni, hogy az első négyszögnek a sorrendben következő, azaz a BC oldalával való F metszéspontja mindkét szakaszt felezi, hiszen ekkor F a BC oldal felezőpontja, és E_1 az E-nek erre vonatkozó tükörképe.

A két szakasz akkor és csak akkor felezi egymást, ha a $BECE_1$ négyszög paralelogramma. Ez viszont igaz, mert az E_1C szakasz az A_1B_1B háromszög középvonala, így párhuzamos az A_1B szakasszal és fele akkora. Ugyanekkora az A_1B szakasz meghosszabbítását képező BE szakasz is, mert A_1B az AB szakasz tükörképe. Így BE és E_1C egy irányban párhuzamosak és egyenlők, tehát $BECE_1$ valóban paralelogramma. Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.

3. feladat. *Egy üdülőben hárman közösen* 30 db *közönséges lottószelvényt töltöttek ki. Ehhez A* 25, *B* 36 *és C* 38 *Ft-ot adott. Több szelvénnyel találatot értek el, kézhez kaptak* 1100 *Ft-ot. Ebből a következő hétre* 30 db *hónapos* (5 *hetes*) *és* 20 db 1 *hetes szelvényt vettek, a maradó összeget pedig úgy osztották fel, hogy C* 2*-szer annyit kapott, mint B, és B* 2*-szer annyit, mint A. Ismét nyertek,* 73 000 *Ft-ot kaptak kézhez. Tovább nem játszhattak együtt, ezért megállapodtak, hogy a második hét betéteinek arányában osztoznak, és hogy a továbbjátszó szelvényekből* 10*-et–*10*-et vesznek át. Ki mennyi készpénzt kapott?*

Megoldás. A játékosok együtt 99 Ft-ot fizettek be a 30 lottószelvényre. Az első heti 1100 Ft tiszta nyereségből a játékosokat betéteik arányában rendre a következő részek illetik meg:

$$A:\quad \frac{25\cdot 1100}{99}=277\frac{7}{9}\text{ Ft},\quad B:\quad \frac{36\cdot 1100}{99}=400\text{ Ft},\quad C:\quad \frac{38\cdot 1100}{99}=422\frac{2}{9}\text{ Ft}.$$

A második hétre vásárolt 30 db 5 hetes szelvény ára $30 \cdot 5 \cdot 3{,}30 = 495$ Ft, a 20 db közönséges szelvény ára 66 Ft, összesen 561 Ft, így 539 Ft-ot osztottak szét. A részek aránya $1 : 2 : 4$, az arányszámok összege 7, ezért A $539 : 7 = 77$ Ft-ot kapott, B 154 Ft-ot, C pedig 308 Ft-ot.

Így az egyes játékosok részesedése az új szelvények árában a következő:

$$A:\quad 200\frac{7}{9}\,\text{Ft},\qquad B:\quad 246\ \text{Ft},\qquad C:\quad 114\frac{2}{9}\ \text{Ft}.$$

Ezek aránya:

$$1807 : 2214 : 1028,$$

és az arányszámok összege 5049. Ennek megfelelően kell felosztaniuk a második húzás utáni vagyonukat. Ez egyrészt a 73 000 Ft készpénzből áll, másrészt a 30 db továbbjátszó szelvényből, amelyek értéke $30 \cdot 4 \cdot 3{,}30 = 396$ Ft, mert még 4 hétre érvényesek. Így a részek, fillérre kerekítve:

$$A:\quad \frac{1807 \cdot 73\,396}{5049} = 26\,267{,}89\ \text{Ft},$$
$$B:\quad \frac{2214 \cdot 73\,396}{5049} = 32\,184{,}34\ \text{Ft},\qquad C:\quad \frac{1028 \cdot 73\,396}{5049} = 14\,943{,}77\ \text{Ft}.$$

Továbbjátszó szelvényekben mindegyikük 132 Ft értéket kapott, így készpénzrészesedésük:

$$A:\quad 26\,135{,}89\ \text{Ft},\qquad B:\quad 32\,052{,}34\ \text{Ft},\qquad C:\quad 14\,811{,}77\ \text{Ft}.$$

Megjegyzés. Sok versenyző azzal követett el kisebb hibát, hogy csak a 73 000 Ft-ot osztotta szét $1807 : 2214 : 1028$ arányban, megfeledkezve a továbbjátszó szelvényekről, pedig ezek is a közös vagyon részét képezik. – Többen viszont a szelvények árát felejtették el levonni az egyes játékosokra jutó teljes forint értékből.

Lukács Ottó