I. Keresnünk kell annak szükséges és elegendő feltételét, hogy $a \neq 0$ esetén az f-nek az x és $2t-x$ helyeken felvett értékeiből képezett különbség – ami tetszés szerint megválasztott t esetén ugyancsak függvénye x-nek – azonosan 0 legyen. Jelöljük ezt a függvényt $D(x)$-szel és alakítsuk a pozitív egész n-ekre ismeretes

$$u^n - v^n = (u-v)(u^{n-1} + u^{n-2}v + u^{n-3}v^2 + \ldots + uv^{n-2} + v^{n-1})$$

azonosság felhasználásával az alábbiak szerint. $u = x$ és $v = 2t-x$ esetén $u - v = 2(x-t)$, célszerű lesz ennek felét átmenetileg egy betűvel jelölni, legyen $x - t = z$, így $x = t + z$ és $2t - x = t - z$.

$$\begin{aligned}
D(x) &= a\{x^4 - (2t-x)^4\} + b\{x^3 - (2t-x)^3\} + c\{x^2 - (2t-x)^2\} + d\{x - (2t-x)\} = \\
&= 2az\{(t+z)^3 + (t+z)^2(t-z) + (t+z)(t-z)^2 + (t-z)^3\} + \\
&+ 2bz\{(t+z)^2 + (t+z)(t-z) + (t-z)\}^2 + \\
&+ 2cz\{(t+z) + (t-z)\} + 2dz = \\
&= 2z\{4a(t^3 + tz^2) + b(3t^2 + z^2) + 2ct + d\} = \\
&= 2z\{(4at+b)z^2 + (4at^3 + 3bt^2 + 2ct + d)\} = \\
&= 2(x-t)\{A(x-t)^2 + B\},
\end{aligned}$$

ahol

$$A = 4at + b \quad \text{és} \quad B = 4at^3 + 3bt^2 + 2ct + d.$$

II. Ha mármost a kívánt tulajdonságú t szám létezik, akkor minden x-re $D(x) = 0$, és ugyanez áll a $D(x)$ utolsó alakjának $A(x-t)^2 + B = D_1(x)$ tényezőjére, hiszen az előtte álló $(x-t)$ tényező csak az $x = t$ helyen tűnik el, ami pedig a kérdésben érdektelen, ekkor ugyanis $2t - x = x$.

$D_1(x)$ azonos eltűnéséből következik, hogy $A = B = 0$. Ugyanis $A \neq 0$ esetén $D_1(x)$ legföljebb két $x-t$ érték esetén válhat 0-vá; ha viszont $A = 0$, akkor $D_1(x) = B$, ezért $B = 0$. Eszerint t létezésének szükséges feltétele $A = B = 0$. Az elsőből a 0 feltevéssel meghatározható a kérdéses $t = -b/4a$ szám és ezt a $B = 0$ feltételbe behelyettesítve megkapjuk az állításbeli feltételt:

$$B = \frac{1}{16a^2}(-b^3 + 3b^3 - 8abc + 16a^2d) = \frac{b^3 - 4abc + 8a^2d}{8a^2} = 0, \tag{2}$$

hiszen a számlálóban éppen (1) bal oldala áll.

III. Megmutatjuk, hogy a feltétel elegendő is, (1) teljesülése esetén megadható olyan t, hogy minden x-re $f(x) = f(2t-x)$. Valóban, $t = -b/4a$ mellett egyrészt $A = 0$, másrészt (2) szerint $B = 0$, tehát $D_1(x) = 0$, és $f(x)$ szimmetrikus menetű.

Ezzel a feladat mindkét állítását bebizonyítottuk.

Barbarits András (Budapest, I. István Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzés. A versenyzők észrevették az eredeti kitűzésbeli előjelhibát – az orosz és angol szövegben nem volt hiba –, valamint a szükséges $a \neq 0$ kiegészítést.