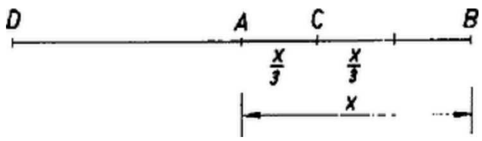
1. feladat. *Egy ember az A HÉV-megállónál várakozik. Elunja a várakozást és elindul a következő B HÉV-megálló felé. Mikor az A és B közötti út 1/3-át megtette, megpillantja az A megálló felé* 30 km/óra *sebességgel közeledő szerelvényt. Ha teljes sebességgel futni kezd akár az A, akár a B megálló felé, éppen eléri a vonatot. Mekkora az a maximális sebesség, amellyel futni tud?*

I. megoldás. Legyen a keresett sebesség v km/óra, az AB útszakasz hossza x km, és jelölje C azt a pontot, amelyből az ember megpillantja a vonatot.



1. ábra

Ekkor $CA = x/3$, $CB = 2x/3$, és az ezen utak megtételéhez szükséges idők $x/3v$ óra, ill. $2x/3v$ óra. Ugyanennyi idő alatt ér a vonat is a megpillantáskor volt helyzetéből A-ba, B-be, ezért a vonatnak az AB út megtételéhez szükséges ideje e két idő különbsége: $x/3v$ óra. Ez az idő a vonat sebességével kifejezve $x/30$, így a két kifejezés egyenlőségéből $v = 10$. Emberünk maximálisan 10 km/óra sebességgel tud futni.

II. megoldás. A feladat egyenlet nélkül is megoldható. Mire az ember C-ből eljut A-ba, addigra a vonat is A-ba ér. Így ha az ember B felé fut, az alatt az idő alatt, amíg a vonat A-ba ér, ő ugyanakkora távolságot tesz meg, mint amennyire C az A-tól van, vagyis az AB út harmadát. Ezért B-ig már az út 2/3 részét megtette, csak az 1/3 rész van hátra. Mialatt ezt a harmadot megteszi, a vonat A-ból B-be jut, vagyis megteszi az egész AB távolságot. Így az ember sebessége a vonat sebességének harmadrésze, azaz 10 km/óra.

Megjegyzések. 1. A megoldásból nem adódik ki a tekintetbe vett útszakaszok hossza. A közölt egyetlen összefüggés csak a keresett ismeretlen meghatározására elegendő.

2. Az viszont kiderül a feladat feltételeiből – és ez is felhasználható a megoldáshoz –, hogy a vonat a megpillantáskor (az ábrán D) annyira van A-tól, mint A van B-től, hiszen az utas B-ig futva kétannyi utat tesz meg, mint ha A-ba fut, így a vonat B-ig, ill. A-ig megtett útjai közt is ez az arány.

2. feladat. *Írjuk fel egy szám jegyeit fordított sorrendbe. Mutassuk ki, hogy az így kapott (tízes számrendszerbeli) szám nem lehet az eredeti szám kétszerese.*

I. megoldás. Legyen az eredeti N szám első (legmagasabb helyértékű) jegye a, utolsó jegye b, vagyis $N = \overline{a \ldots b}$, és tegyük fel az állítással ellentétben, hogy kétszerese egyenlő a jegyek fordított sorrendű felírása útján adódó számmal: $2N = \overline{b \ldots a}$. Mivel $2N$ páros szám, azért utolsó jegye, a is páros. Másrészt $2N$ ugyanannyi jegyű, mint N, ezért a kisebb 5-nél, így a csak 2 vagy 4 lehet.

Azonban mindkét kiindulás lehetetlenségre vezet. Ha $a = 2$, akkor $2N$ első jegye 4 vagy 5, az a utáni számjegy 2-vel való szorzásakor esetleg fellépő, átviendő maradék szerint. Így viszont $2N$ vagy 8-asra, vagy 0-ra végződik, tehát nem 2-re. Hasonlóan $a = 4$-ből $b = 8$, vagy 9, és így $2N$ utolsó jegye 6 vagy 8, nem pedig 4. – Nem lehetséges tehát, hogy egy szám jegyeit fordított sorrendben leírva a szám kétszeresét kapjuk.

II. megoldás. Célhoz juthatunk párossági meggondolások nélkül is. Láttuk, hogy $b = 2a + 1$, vagy $b = 2a$ attól függően, hogy a 2-vel való szorzás utolsó előtti lépésében lépett-e fel maradék vagy nem. ($b = 2a + 2$ már lehetetlen számjegy, mert az ezzel kezdődő számokat 2-vel osztva a hányados $(a + 1)$-es jeggyel kezdődik, nem a-val.) A szorzás első lépésében is két eset lehetséges aszerint, hogy $2b$ eléri, esetleg meg is haladja a 10-et, vagy nem. Miután mindig $2b < 20$, az utóbbi esetben $2b = a$, az előbbiben $2b = a+10$. b előbbi kifejezéseit ide behelyettesítve a-ra egyismeretlenes egyenleteket kapunk:

$$4a + 2 = a, \qquad 4a + 2 = a + 10,$$
$$4a = a, \qquad 4a = a + 10.$$

Ezekből $3a$ értéke vagy -2, vagy 0, vagy 8 vagy 10. Így számjegy gyanánt használható – ti. 0 és 9 közti egész – a-érték csak a 0, de N első jegye gyanánt ez sem fogadható el. Ezek szerint valóban nincs a szóban forgó tulajdonsággal bíró szám.

3. feladat. *Bizonyítsuk be, hogy bármely konvex négyszögben van olyan oldal, amely kisebb a hosszabbik átlónál.*

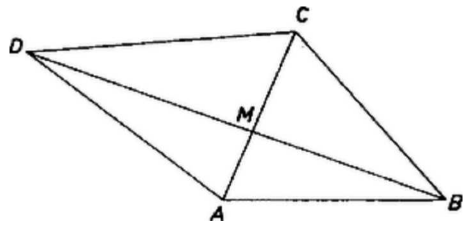
I. megoldás. Jelöljük egy $ABCD$ konvex négyszög átlóinak metszéspontját M-mel (2. ábra). Alkalmazzuk a háromszög-egyenlőtlenséget az ABM, BCM, CDM, DAM háromszögekre

$$AB < AM + BM, \qquad BC < BM + CM,$$
$$CD < CM + DM, \qquad DA < DM + AM.$$

A négy egyenlőtlenséget összeadva

$$AB+BC+CD+DA<2(AM+BM+CM+DM)=2(AC+BD).$$

A bal oldal nem kisebb a legkisebb oldal 4-szeresénél, a jobb nem nagyobb a nagyobb átló négyszeresénél, s így valóban a legkisebb oldal kisebb a nagyobbik átlónál.



2. ábra

II. megoldás. Vizsgáljuk pl. a négyszög AB oldalát és AC átlóját. Ha $AB<AC$, akkor a feladat állítása érvényes: a legkisebb oldal biztosan kisebb a nagyobbik átlónál.

Ha $AB\geq AC$, akkor megmutatjuk, hogy az AB-vel szemben levő oldal kisebb a másik átlónál: $CD<BD$. A feltételből ugyanis következik (az ABC háromszögre alkalmazva az oldalak és szögek közti összefüggést), hogy

$$ACB\sphericalangle\geq ABC\sphericalangle.$$

Másrészt konvex négyszög átlói két részre osztják a négyszögnek a végpontjaikban levő szögeit, így

$$DCB\sphericalangle>ACB\sphericalangle\geq ABC\sphericalangle>DBC\sphericalangle.$$

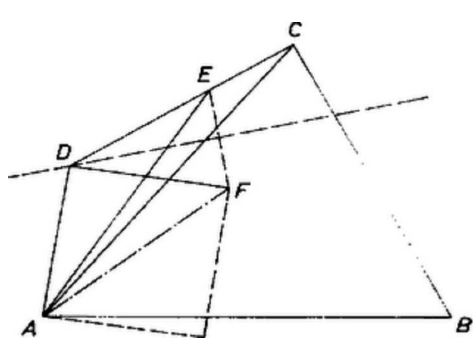
Ebből ismét az oldalak és szögek közti összefüggés alapján nyerjük, hogy $BD>CD$, amint állítottuk. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Megjegyzések. 1. A feladat állításánál többet is bizonyítottunk: konvex négyszög bármelyik szemben fekvő oldalpárjának egyik tagja kisebb valamelyik átlónál (tehát a hosszabb átlónál minden esetre kisebb), s így legalább két oldal kisebb, mint az átlók hosszabbika. Azt is látjuk, hogy ha csak két ilyen oldal van, ezek szomszédosak.

2. A megoldásból az is következik, hogy ha valamelyik oldal nem kisebb egyik átlónál sem, akkor a szemben fekvő oldal mindkét átlónál kisebb.

3. A rövidebb átlóra a bizonyítás azt adja, hogy ahány oldal nem kisebb a rövidebb átlónál, legalább annyi a hosszabbik átlónál kisebb oldal van.

III. megoldás. Legyen a négyszög legnagyobb szöge az ADC szög (3. ábra). Ez legalább 90°, különben ugyanis a szögek összege nem lehetne 360°. Így az ADC szög nagyobb az ADC háromszög másik két szögénél. Ezért az ADC szöget bezáró DA és DC oldalak – egyszersmind a négyszögnek is oldalai – kisebbek a háromszög AC oldalánál, ami a négyszögnek átlója. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.



3. ábra

Megjegyzések. 1. A mondottakból következik, hogy ha egy konvex négyszögben két szemben levő szög egyike sem hegyesszög, akkor mind a négy oldal kisebb a hosszabb átlónál.

2. Megmutatjuk, hogy minden konvex négyszögnek a legkisebb oldala fölé négyzetet rajzolva még ennek az átlója sem nagyobb a hosszabb átlónál.

Legyen továbbra is $ADC\sphericalangle \geq 90°$, válasszuk a betűzést úgy, hogy álljon $DC \geq DA$, mérjük rá a DA szakaszt D-től a DC félegyenesre, és legyen a végpont E. Ekkor $AE \leq AC$, mert az ADE háromszögből, amennyiben E különbözik C-től,

$$AEC\sphericalangle = ADE\sphericalangle + DAE\sphericalangle > ADE\sphericalangle \geq 90°,$$

tehát az AEC háromszögben E-nél tompaszög van, $AC > AE$. Ha $ADE\sphericalangle = 90°$, akkor AE az említett négyzet-átló, s így állításunk helyes. Ha $ADE\sphericalangle > 90°$, akkor állítsunk merőlegest D-ben AD-re és mérjük fel erre a $DF = DA$ szakaszt, azon az oldalon, amelyen a négyszög fekszik. Így $DF = DE$, tehát D rajta van az EF szakasz felező merőlegesén. A pedig e merőlegesnek F-et tartalmazó partján van, mert a felező merőlegesből D körüli, hegyessszögű forgással jutunk DF-be (ti. akkorával mint DE-be), onnan tovább $90°$-os forgással DA-ba, és a két forgás összege kisebb $180°$-nál. Ez esetben AF, a kérdéses négyzetátló, kisebb AE-nél. Ha pedig E egybeesik C-vel, akkor $AF \leq AE = AC$. Ezzel igazoltuk állításunkat.

Pythagorász tételéből tudjuk, hogy az AD oldalú négyzet átlójának hossza $AD\sqrt{2}$. Eszerint konvex négyszög két, tompaszöget vagy derékszöget bezáró oldala közül a kisebbik $\sqrt{2}$-szöröse kisebb valamelyik átlónál vagy egyenlő vele. [1]

IV. megoldás. Az átlók M metszéspontja mindegyik átlót két részre osztja (2. ábra). Válasszuk a betűzést úgy, hogy DM a négy szakasz legnagyobbika legyen, vagy a legnagyobbak egyike. Ekkor

$$AB < AM + BM \leq DM + BM = BD,$$

tehát van olyan oldal, amelyik kisebb egy átlónál, s így a legkisebb oldal bizonyosan kisebb a nagyobbik átlónál.

Megjegyzések. 1. A választott jelölések mellett fennáll

$$BC < BM + CM \leq BM + DM = BD$$

is, tehát *konvex négyszögnek mindig van két szomszédos oldala, amelyek rövidebbek a közös végpontjukból induló átlónál.*

2. Kiindulhatunk a legkisebb átlórészből is. Ha pl. AM nem nagyobb a BM, CM, DM szakaszok egyikénél sem, akkor

$$AB < AM + BM \leq BM + DM = BD$$

és

$$AD < AM + DM \leq BM + DM = BD.$$

Így azt kaptuk, hogy *konvex négyszögben mindig van két szomszédos oldal, amelyek kisebbek a velük háromszöget alkotó átlónál.*

A két oldalpár közös végpontjai csak akkor lehetnek szemközti csúcsok, ha ugyanaz a szakasz szerepel a legrövidebbek közt és a leghosszabbak közt is, vagyis ha M a két átlót csupa egyenlő részekre osztja (téglalap esetén). Ekkor bármelyik szomszédos oldalpár rendelkezik mindkét tulajdonsággal. Egyébként vagy mindkét állítás ugyanarról az oldalpárról szól, vagy ugyanarról az átlóról (és a szóban forgó két oldal közül egy oldal kétszer nyer említést).

A két állításból így az is következik, hogy *egy konvex négyszögnek vagy van két szomszédos oldala, amelyek mindegyike kisebb mindkét átlónál, vagy három oldala kisebb a hosszabb átlónál.*

Fried Ervin, Surányi János

[1] Lásd az 1961. évi Kürschák József matematikai tanulóverseny 1. feladatát, K. M. L. 24 (1962) 98. o.