A megelőző két cikkben (1960. és 1961. évf. 11. sz.) kétféle skálát ismertünk meg. Az első volt a Pythagoras–féle, amely fokait a tiszta kvintek sorozatából vette, a második a harmonikus dur–skála, amely három dur–akkord hangjaiból van összeállítva, s az előbbiből úgy állítható elő legegyszerűbben, hogy ennek 3., 6. és 7. fokát egy szintonikus kommával leszállítjuk. De ez a harmonikus dur–skála is csak addig felel meg a gyakorlati zene követelményeinek, amíg megelégszünk a főakkordok használatával, és a c-dur hangnemet nem hagyjuk el. A zene azonban egyre fejlődött, a dallamok harmonizálása megkívánta a skála többi fokára építhető ún. mellékakkordok használatát is, és gyakran tért át új hangnemekre, amelyekhez már más hangból induló skála tartozik. Ezt nevezik a zenészek modulációnak.

A mellékakkordok a skála 2. 3. 6. és 7. fokára építhetők fel, a legutolsó azonban disszonáns akkord, mert a $h-f$ kvint a tiszta kvintnél lényegesen kisebb (az f oktávjának a h-tól való távolsága ui. $2 \cdot \frac{4}{3} : \frac{15}{8} = \frac{64}{45} < \frac{3}{2}$. Ezt tehát vizsgálataink köréből kizárjuk, s figyelmünket csak a többi háromra, a dfa, egh és ace akkordokra, az ún. moll–akkordokra fordítjuk. Ezek hasonlóan építhetők fel, mint a dur–akkordok, tehát alaphangból, ennek tercéből és kvintjéből állnak, a terc azonban itt nem nagy terc, mint a dur–akkordoknál volt, hanem kis terc. Azonban, ha a három moll–akkordot közelebbről megvizsgáljuk, meglepetéssel vesszük észre, hogy közülük csak az egh és ace harmonikusan tiszta, ellenben a dfa terce is, kvintje is egy kommával alacsonyabb a kelleténél. A harmóniai tisztaságot helyre tudnók állítani azzal, hogy a d-t is leszállítjuk egy kommával, de ekkor meg a ghd domináns–akkord kvintje lenne egy kommával alacsonyabb, amí még nagyobb baj. Segítség tehát nincs, bele kell törődnünk, hogy a 2. fokon álló moll–akkord mindig hibás.

Még több baj merül fel a modulációnál. Ha a dur–skálát c helyett más hanggal kezdjük, akkor a kétféle egészhang váltakozása miatt az eddigi törzshangokat az új skála számára néha egy kommával el kell hangolnunk, de egészen új hangokat is kell a törzshangok közé beiktatnunk. Ha pl. a skálát a matematikai hangolás szerinti legelső oktáv d-jével ($n = 9/8$) kezdjük, akkor a harmonikus dur–skálára talált hangközi viszonyok fenntartásával a következő frekvenciákra jutunk:

d	c	f	g	a	b	c	d
$9/8$	$\frac{9}{8} \cdot \frac{9}{8} = \frac{81}{64}$	$\frac{9}{8} \cdot \frac{5}{4} = \frac{45}{32}$	$\frac{9}{8} \cdot \frac{4}{3} = \frac{3}{2}$	$\frac{9}{8} \cdot \frac{3}{2} = \frac{27}{16}$	$\frac{9}{8} \cdot \frac{5}{3} = \frac{15}{8}$	$\frac{9}{8} \cdot \frac{15}{8} = \frac{135}{64}$	$\frac{9}{8} \cdot 2 = \frac{9}{4}$

Látjuk, hogy a skála első, 4. 6. és 8. fokán ugyanazon hangok állnak, mint amelyek a c-dur skálában szerepeltek, viszont a 2. fokon álló e és az 5. fokon álló a egy kommával magasabb lett. Tényleg:

$$\frac{5}{4} \cdot \frac{81}{80} = \frac{81}{64} \quad \text{és} \quad \frac{5}{3} \cdot \frac{81}{80} = \frac{27}{16}.$$

Teljesen új hangok kerültek az f és c helyére. Ezek már nem egy kommányi, hanem zenei gyakorlattal nem rendelkező fül számára is jól észrevehető mértékben lettek magasabbak. A magasságnövekedés intervalluma mindkettőnél ugyanaz:

$$\frac{45}{32} : \frac{4}{3} = \frac{135}{128}, \qquad \frac{135}{64} : 2 = \frac{135}{128}.$$

Ha ezt a törtet $\frac{n+1}{n}$ alakba[1] írjuk át, jó közelítéssel:

$$\frac{135}{128} = 1 + \frac{7}{128} \approx 1 + \frac{1}{18} = \frac{19}{18};$$

észrevehető, hogy ez az intervallum jóval nagyobb a 81/80 szintonikus kommánál, de csak valamivel kisebb a 16/15 diatonikus félhangnál.

A zenében az ilyen kb. félhanggal felemelt hangokat módosított vagy kromatizált hangoknak mondjuk, s megnevezésükre a törzshang neve után függesztett *-isz* végződést, leírásukra pedig a hangjegy elé tett # (kereszt) jelet használjuk. A d-dur skála új hangjai tehát *fisz* és *cisz*. De előfordul lefelé módosítás is. Ha pl. a skálát f-vel kezdjük, akkor az f-dur skála hangjai.

f	g	a	h	c	d	e	f
$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3} \cdot \frac{9}{8} = \frac{3}{2}$	$\frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{3}$	$\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{16}{9}$	$\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} = 2$	$\frac{4}{3} \cdot \frac{5}{3} = \frac{20}{9}$	$\frac{4}{3} \cdot \frac{15}{8} = \frac{5}{2}$	$\frac{4}{3} \cdot 2 = \frac{8}{3}$

Itt az első, 2. 3. 5. 7. és 8. fokon az eredeti törzshangok, vagy ezek oktávjai állnak, a 6. fokon d-nek egy kommányi leszállításával találkozunk, ($9/8 : 81/80 = 10/9$ ennek oktávja $20/9$), a 4. fokon azonban a h-nál jóval alacsonyabb hangra jutottunk, amelynek h-hoz viszonyított intervalluma $15/8 : 16/9 = 135/128$, tehát ugyanaz, mint fentebb a felemeléseké volt.

A zenészek a lefelé kromatizált hangokat a törzshang neve után függesztett *– esz* végződéssel nevezik meg, (kivételek: *aesz* helyett *asz, eesz* helyett *esz, hesz* helyett *bé*), írásban a hangjegy elé b (bé) jellel.

---

[1] Az $\frac{n+1}{n}$ alakú törteket könnyű összehasonlítani. $n = 1$-nél a tört értéke 2, n növekedésével pedig folyton kisebbedve közeledik 1-hez.

A 135/128 intervallumot kromatikus félhangnak vagy kis félhangnak nevezzük, megkülönböztetésül a diatonikus vagy nagy félhangtól. Ez az érték azonban csak arra az esetre vonatkozik, ha a kromatizált hang olyan két törzshang közé esik, amelyek nagy egészhangnyi távolságban vannak egymástól. Ha a szomszédos törzshangok távolsága kis egészhang, akkor a kromatikus félhang is egy kommával szűkebb lesz, tehát mértéke $135/128 : 81/80 = 25/24$. Szokás ezt egységes kromatikus félhangként is használni, aminek az az alapja, hogy ez egyúttal a nagy és kis terc intervallumok eltérésének mértéke is:

$$5/4 : 6/5 = 25/24,$$

A kromatizált hangokat már a harmonikus zene kialakulása előtt is használták, de mivel akkor még más volt a diatonikus félhang, másnak kellett lennie a kromatikusnak is. A pythagoraszi hangrendszerben a kromatizált hangokat is a tiszta kvintek sorozatából vették, amennyiben a skála alapját képező

$$f,\ c,\ g,\ d,\ a,\ e,\ h$$

kvintsorozatot felfelé is, lefelé is tovább folytatták. Felfelé haladva h után kapták a *fisz, cisz, gisz*, ... stb. kromatizált hangokat, lefelé haladva pedig f előtt a *bé, esz, asz*, ... stb. hangokat.

Már néhányszor használtuk a „hangrendszer” szót, de még nem tudjuk ennek pontos jelentését. Hangrendszeren értjük a magasságra nézve végtelen sok lehetséges hang közül a zenei gyakorlat számára nem túl kevés, de nem is túl sok olyan hang kiválasztását, amelyek azután oktávokban ismétlődnek. Ilyen volt a pythagoraszi és a harmonikus hangrendszer is, csakhogy ezeknél az oktávokban való ismétlődést csak erőszakoltan, önkényesen tudtuk elérni, midőn a skála 8. fokául a kezdőhang oktávját tettük, s ezt vettük a következő oktáv kezdőhangjának. Mindkét hangrendszer ui. lényegileg a tiszta kvintek sorozatából származik. Ez a kvintsorozat valamely n frekvenciájú hangból kiindulva ez lesz:

$$(1) \qquad n,\ \frac{3}{2}n,\ \left(\frac{3}{2}\right)^2 n,\ \left(\frac{3}{2}\right)^3 n,\ \ldots,\ \left(\frac{3}{2}\right)^k n,\ \ldots,$$

Könnyen belátható, hogy ez végtelen sok különböző hangot ad, mert a kezdőhang valamely oktávjára soha el nem juthatunk. Ui. ha volna egy olyan tagja a sorozatnak, pl. a k-adik kvint, amely a kezdőhangnak pl. l-edik oktávja lenne, akkor ez azt jelentené, hogy

$$2^l \cdot n = \left(\frac{3}{2}\right)^k \cdot n, \quad \text{azaz} \quad 2^{l+k} = 3^k,$$

ami nyilván képtelenség, ha k és l egész számok.

A tiszta kvintek sorozatából sohasem kaphatunk oktávokban ismétlődő hangokat, vagyis zárt hangrendszert. Hogy egy hasonlattal éljünk, az oktáv és a kvint ugyanolyan összemérhetetlen intervallumok, mint amilyen összemérhetetlen időközök a naptári időmérés alapegységei, az év és a nap. Emiatt kellett ismételten naptárreformokhoz folyamodni, amelyek ezt az összemérhetetlenséget évszázadokra kiegyenlítették ugyan, véglegesen azonban sohasem szüntethetik meg.

Azonban már Pythagoras tudta, hogy 12 kvintlépés csak nagyon kevéssel magasabb hangot ad, mint 7 oktávlépés, amit számolással rögtön ellenőrizhetünk:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} = \frac{531441}{4096} = 129{,}7$$
$$2^7 = 128.$$

Ennek a két hangnak intervalluma,

$$\Pi = \left(\frac{3}{2}\right)^{12} : 2^7 = \frac{3^{12}}{2^{19}} = \frac{521441}{524288}$$

alig nagyobb a szintonikus kommánál, amiről könnyen meggyőződhetünk, ha Π-t a jól közelítő 74/73 törttel adjuk meg. Ezt a Π intervallumot Pythagoras–féle kommának nevezzük.

Ez a felismerés volt az oka annak is, hogy a *fix* hangolású hangszereknél, mint amilyen az orgona és a zongora, egy oktávon belül 12 hangot vettek fel, amely szokás napjainkig megmaradt. A legrégibb ilyen hangszerek is a maihoz hasonló billentyűzettel készültek. Johann van Eyck hollandi mesternek a XV. század legelején festett egyik képén, amely Szent Cecíliát orgona előtt ülve ábrázolja, már világosan látható a billentyűknek a maival azonos elrendezése. Természetesen ezek a hangszerek még a pythagoraszi rendszer szerint voltak hangolva, tehát a törzshangokat adó fehér billentyűk tiszta kvintekben. A kromatizált hangokat adó fekete billentyűket úgy hangolták, hogy *cisz* azonos legyen *desz*-szel, *disz* azonos *esz*-szel stb., amit ezen különben a nem azonos hangok frekvenciáinak közepelésével oldottak meg. A félhangnyi távolságban levő törzshangok közé nem került fekete billentyű, az *eiszt* azonosnak vették f-vel, a *feszt* e-vel, a *hiszt* c-vel, a *ceszt* h-val.

Az így hangolt zongora még a polifónia korszakában is használhatónak bizonyult, a harmonikus zene számára azonban már nem volt alkalmas, mert akkordjai mind hamisan szóltak. Emiatt sürgetővé vált a hangolásnak a harmonikus zene igényeihez alkalmazott átalakítása, a temperálás. Ennek gyakorlati keresztülvitelére egymás után születtek a tervek és javaslatok a zenészek és matematikusok részéről. Valamennyit az az alapelv irányította, hogy az oktáv és a kvint tisztasága megmaradjon, mert a fül ezekkel szemben a legkényesebb.

Eleinte úgy próbálták a temperálást megvalósítani, hogy a nem záródó kvintkörből előálló hibát egy helyre koncentrálták. Ezek az ún. nem egyenletes temperálások, amelyek közül néhány igen sokáig használatban volt. (Kirnberger, Schlick.) Az így hangolt zongorán tisztán lehetett játszani c-durban és az ezzel közelebbi rokon hangnemekben, távolabbi hangnemekbe vezető modulációknál azonban valahol szükségszerűen fel kellett lépnie egy fülsértően hamis kvintnek, az ún. „farkaskvint”-nek, amelyet azért neveztek így, mert úgy üvöltött játék közben, mint a farkas az erdőben.

Ezek miatt mindinkább megérlelődött az a meggyőződés, hogy a nem egyenletes temperálásnál sokkal jobb megoldást kaphatunk, ha a kvintkör záródási hibáját mind a 12 kvintre egyenletesen osztjuk el. Így feladjuk ugyan a kvint tisztaságának elvét, de az elhangolás egyetlen kvintnél igen kicsi lesz, a Pythagoras–féle komma 12-edrésze. Ezt a megoldást a XVII. század végén Werckmeister és Neidhart szorgalmazták, s elgondolásukat a zenetörténet egyik legnagyobb alakja, J. S. Bach is annyira magáévá tette, hogy támogatására komponálta azt a 12 preludiumból és fugából álló, „Das wohltemperierte Klavier” című halhatatlan művét, amellyel igazolni kívánta, hogy az így hangolt zongorán mind a 12 hangnemben azonosan kielégítő tisztasággal lehet játszani. A zenészek eleinte ellenkezéssel fogadták ezt a forradalmi újítást, lassanként azonban csatlakoztak az egyenletes temperálás híveihez. Azóta a zongorákat és orgonákat így hangolják.

Vizsgáljuk meg most ezt az egyenletes temperálást a matematika nézőpontjából.

Tudjuk, hogy a (1) kvintsorozatban $(3/2)^{12} \cdot n$ csak igen kevéssel magasabb hangot jelent, mint $2^7 \cdot n$. Ha tehát a kvint frekvenciamérték $3/2$ helyett egy ennél valamivel kisebb q számot vezetünk be, akkor elérhetjük, hogy $q^{12} \cdot n = 2^7 n$ legyen pontosan. Az ehhez szükséges $q = 2^{7/12}$ irracionális szám. Ezzel az új kvintsorozat (1) helyett a következő lesz:

$$n,\ 2^{7/12}n,\ \left(2^{7/12}\right)^2 n,\ \left(2^{7/12}\right)^3 n,\ \ldots,\ \left(2^{7/12}\right)^k n,\ \ldots$$

Ez olyan mértani sorozat, amelynek kvociense $2^{7/12}$. De $k = 12$-nél már $2^7 n$-et, tehát a kezdőhang 7-ik oktávját kapjuk, s innen kezdve sorban valamennyi eddigi hang 7 oktávval magasabban ismétlődik. Elég tehát a sorozatot $k = 11$-ig vennünk:

$$\begin{gathered} n,\ 2^{7/12}n,\ 2^{14/12}n,\ 2^{21/12}n,\ 2^{28/12}n,\ 2^{35/12}n,\ 2^{42/12}n, \\ 2^{49/12}n,\ 2^{56/12}n,\ 2^{63/12}n,\ 2^{70/12}n,\ 2^{77/12}n,\ (2^{84/12}n = 2^7 n). \end{gathered}$$

Ezeket a hangokat azonban még egyetlen oktáv keretébe kell leszállítanunk, n és $2n$ közé, vagyis a 2 kitevőjét 0 és 1 közé, amit úgy érhetünk el, hogy a törtkitevőt, ha ez áltört, vegyes számmá alakítjuk, az egész–részt elhagyjuk, s csak a valódi törtet tartjuk meg. Így az előbbi sorból a következő lesz:

$$\begin{gathered} n,\ 2^{7/12}n,\ 2^{2/12}n,\ 2^{9/12}n,\ 2^{4/12}n,\ 2^{11/12}n,\ 2^{6/12}n,\ 2^{1/12}n, \\ 2^{8/12}n,\ 2^{3/12}n,\ 2^{10/12}n,\ 2^{5/12}n,\ (2n). \end{gathered}$$

Látjuk, hogy a kitevők mind különbözők, de mivel nevezőik egyenlők, könnyen rendezhetők növekvő sorrendbe, vagyis a hangok a növekvő magasság sorrendjébe.

Így ismét egy mértani sorozatot kapunk, amelynek kvociense $2^{1/12} = \sqrt[12]{2}$.

Ha n-et 1-nek vesszük, s ezt a hangot c-nek nevezzük, akkor a matematikai hangolás első oktávjába eső temperált kromatikus skála hangjait kapjuk a következő táblázatos összeállításban:

A hang neve	frekvenciája	A hang neve	frekvenciája
c	1	g	$2^{7/12} = 1{,}49831$
cisz=desz	$2^{1/12} = 1{,}05946$	gisz=asz	$2^{8/12} = 2^{2/3} = 1{,}58740$
d	$2^{2/12} = 2^{1/6} = 1{,}12246$	a	$2^{9/12} = 2^{3/4} = 1{,}68179$
disz=esz	$2^{3/12} = 2^{1/4} = 1{,}18921$	aisz=bé	$2^{10/12} = 2^{5/6} = 1{,}78180$
e=fesz	$2^{4/12} = 2^{1/3} = 1{,}25992$	h=cesz	$2^{11/12} = 1{,}88775$
eisz=f	$2^{5/12} = 1{,}33484$	hisz=c	$2^{12/12} = 2$
fisz=gesz	$2^{6/12} = 2^{1/2} = 1{,}41421$		

A temperált hangrendszer a skála hangközi viszonyait rendkívüli mértékben leegyszerűsítette. Megszüntette a diatonikus és kromatikus félhang különbözőségét, minden félhang ugyanakkora lett. Nincs többé nagy és kis egészhang sem, bármely egészhang pontosan azonos két félhangból áll. A periodikus ismétlődés is biztosítva van, 12 félhanglépéssel mindig eljutunk a kezdőhang oktávjára. Azzal pedig, hogy a modulálás lehetőségeit szinte határ nélkül kiterjesztette, a zene további fejlődésére rendkívül serkentőleg hatott. Hátránya viszont az, hogy csakis az oktávok maradtak abszolút tiszták, minden más hangköz bizonyos mértékben el van torzítva. Ezáltal hallásunkat kétségtelenül elrontotta. A mai ember már nem képes olyan finom magasságkülönbségek érzékelésére, mint amelyre a régmúlt századok emberei képesek voltak, s szinte értetlenül áll egyes régi népek zenéjével szemben, ahol az oktáv nem 12, hanem ennél több hangra, tehát harmad- sőt negyedhangokra volt beosztva. A mai zongoristák nagy részének már sejtelme sincs arról, hogy hangszerének tercei hamisak, pedig ez aránylag könnyen észrevehető, sokkal könnyebben, mint a kvintek hiányos tisztasága.

Ezzel elérkeztünk utunk végcéljához. Végignéztük azt a sok nehézséget, amellyel a zenének meg kellett birkóznia addig, míg mai csodálatos fejlettségéhez felemelkedett. Sok mindent lehetett volna még elmondani, ami az itt közöltekkel szorosan összefügg, de akkor ez a cikksorozat nagyon elhúzódott volna. Remélem, hogy ezzel a vázlatos és erősen leegyszerűsített fejtegetéssel is sikerült mai hangrendszerünk kialakulását legalább lényegileg megértetnem, s a zenei matematika nagyon elhanyagolt tudományának híveket szereznem.

Radványi László