A szputnyikok, lunyikok, Vosztok–űrhajók és egyéb mesterséges égitestek a felszállás és az esetleges visszatérés rövid szakaszát leszámítva a tömegpontokra vonatkozó mechanikai törvények által megszabott egyszerű pályákon mozognak a világűrben. Ez a tény másszóval azt jelenti, hogy ezen törvények ismeretében magunk is kiszámíthatjuk, hogy milyen *feltételek* mellett oldható meg valamilyen űrhajózási feladat, és hogy mi lesz a *további sorsa* a pályára helyezett új mesterséges égitestnek. Ha megoldunk egy–egy ilyen feladatot, jobban meg tudjuk ítélni az egyes űrhajózási kísérletek nehézségi fokát (legalábbis a pályára juttatás szempontjából), és ellenőrizni tudjuk az újságokban megjelenő pályaadatok helyességét is.

A mozgástörvények a Newton–féle általános tömegvonzás törvényéből vezethetők le. Tételezzük fel először, hogy a mesterséges égitestre, melynek mozgását vizsgálni kívánjuk, csak egyetlen, nálánál természetesen sokkal nagyobb tömegű égitest vonzása hat. Ez az égitest legyen gömb alakú és homogén tömegeloszlású, hogy egész tömegét a középpontjában egyesítve képzelhessük el. A kérdés, melyre választ keresünk, így hangzik: hol és mekkora sebességgel kell a mesterséges égitestet útnak indítani, hogy egy bizonyos pályát írjon le; vagy fordítva, milyen pályát ír le egy mesterséges égitest, ha a vonzócentrumtól r távolságban adott irányban és v sebességgel indítjuk útnak. Noha eredetileg a Napra mint vonzócentrumra és a bolygókra mint körülötte keringő tömegpontokra mondták ki őket, a Kepler törvények tulajdonképpen a mesterséges holdak mozgását is szabályozzák.

Kepler I. törvénye megadja, hogy kúpszelet pályák jönnek létre, melyek egyik gyújtópontjában a vonzócentrum van. E törvény értelmében tehát a kúpszeletekre érvényes geometriai összefüggések alkalmazhatók a mesterséges égitestek pályáira is. Ha például egy a Föld körül keringő testnél ismerjük a földfelszín feletti legkisebb (h_p) és legnagyobb (h_a) magasságot, az ellipszispálya fél nagytengelye (a) és excentricitása $\left(e = \dfrac{c}{a}\right)$ kiszámítható:

$$r_p = a(1-e) \qquad\qquad r_a = a(1+e),$$

ahol

$$r_p = R_{\text{Föld}} + h_p \qquad r_a = R_{\text{Föld}} + h_a \qquad R_{\text{Föld}} = 6370 \text{ km},$$

végül a fél kistengely: $b = \sqrt{1-e^2}$
A tengelyek hossza segítségével megrajzolhatjuk ugyan a pályaellipszist, de nem tudjuk még, hogy a pálya síkja hogyan helyezkedik el a Föld körül, és hogyan mozog rajta a mesterséges hold. Ez utóbbi kérdés általánosabban úgy fogalmazható meg, hogy a vonzócentrumtól r távolságban milyen v sebességgel mozogjon a test a megadott pályán; vagy fordítva, adott r-hez és v-hez milyen pálya tartozik?

Kepler 2. törvénye tulajdonképpen tartalmazza a választ, de egy a tömegvonzás törvényéből levezethető képlet, az ún. *energiaintegrál* segítségével sokkal egyszerűbben számolhatunk. Az egzakt levezetés helyett kíséreljük meg ezt a törvényt a következő gondolatmenet alapján elfogadni. Az energiamegmaradás értelmében egy test mozgási és helyzeti energiájának összege állandó. (A helyzeti energiára vonatkozólag l. a KML XXV. 5. – 1962/5 – számban megjelent „Erőterek szemléletes ábrázolása” c. cikket.) Tehát egységnyi tömegű, v sebességű testnél az M tömegű vonzócentrumtól r távolságban

$$\frac{1}{2}v^2 - G\frac{M}{r} = \text{konst.}$$

ahol $G = 6{,}664 \cdot 10^{-8}$ cm^2/g sec^2. Körpályán mozgó testnél, ahol a centripetális erőt a gravitáció szolgáltatja

$$\frac{v_{\text{kör}}^2}{r} = \frac{GM}{r^2},$$

vagy a sugarú körpályára

$$v^2 = \frac{GM}{a},$$

Eszerint a test összenergiája a sugarú körpálya esetén

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{GM}{a} - G\frac{M}{a} = -\frac{GM}{2a}.$$

Igazolható, hogy azonos tengelyű pályákra az összenergia azonos, így a nagytengelyű tetszőleges pályán mozgó testre:

$$\frac{1}{2}v^2 - G\frac{M}{r} = -\frac{GM}{2a}, \quad \text{amiből} \quad v^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

Ez az összefüggés, az energiaintegrál, igen nagy jelentőségű az űrhajózási feladatok megoldásánál. Az olyan kérdések, hogy hogyan lehet r-ből és a-ból v-t, illetve r-ből és v-ből a-t meghatározni, az energiaintegrállal közvetlenül megválaszolhatók, sőt, mint látjuk, elegendő a fél nagytengely ismerete (az excentricitás nélkül), és a sebesség nagyságát, mint a vonzócentrumtól mért távolság függvényét ki tudjuk számítani. Már a levezetésből láttuk, hogy a körmozgás sebessége (az első kozmikus sebesség)

$$v_{\text{kör}} = \sqrt{\frac{GM}{a}}.$$

Ahhoz, hogy egy bizonyos r távolságban már ne a vonzócentrum körül záruló ellipszis, hanem nyílt parabolapálya jöjjön létre, vagyis $a = \infty$, $\frac{1}{a} = 0$ legyen, nyilván

$$v_{\text{parabola}} = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \sqrt{2}v_{\text{kör}}$$

kezdősebesség szükséges (második kozmikus vagy szökési sebesség). Nagyobb magasságban nyilván már kisebb sebesség elegendő a keringéshez és a szökéshez is. Ha adott r mellett a kezdősebességet tovább növeljük, az energiaintegrál értelmében $a < 0$, és a pálya hiperbola lesz. Az is látszik, hogy ezeken a pályákon távolodva a test sebessége nem nullára, hanem egy

$$v_\infty = \sqrt{\frac{GM}{|a|}}$$

maradéksebességre csökken le, így hiperbolapályán mozgó testnél az energiaintegrál szerint

$$v^2 = v_{\text{par}}^2 + v_\infty^2.$$

Az energiaintegrálból tehát a pálya bármely pontjára kiszámíthatjuk a szabadon repülő test sebességének nagyságát, ehhez csupán a nagytengely hosszát kell ismerni. Ez utóbbit viszont egy új mesterséges égitest pályára állítása után rendszerint az újságokban közölt adatokból is kiszámíthatjuk: ellipszispályánál vagy a h_p és h_a mennyiségekből a már említett módon, vagy a T keringési időből közvetlenül Kepler 3. törvényével:

$$a = \sqrt[3]{\frac{GM}{4\pi^2}T^2}.$$

(Körpálya esetében ezt a formulát megkapjuk, ha a bolygó tömegének és gyorsulásának szorzatát egyenlővé tesszük a gravitációs erővel.) Ebben a képletben is M a vonzócentrum tömege, mely tehát a és T közvetlen mérése útján meghatározható. Parabola- vagy hiperbola-pályán mozgó űrrakétánál pedig a-t az energiaintegrállal kapjuk meg, ha akár a pálya egyetlen pontjában ismerjük a rakéta sebességének nagyságát.

Mindez természetesen nem elegendő ahhoz, hogy a térben, a csillagokhoz képest elhelyezzük a pályát, például eldöntsük, hogy a pálya síkja milyen szöget zár be az egyenlítővel. A fenti képletekkel ugyancsak nem számítható ki, hogy mekkora annak a hiperbolapályának az excentricitása, melyen az űrrakéta mozog. Ezen problémák megoldásakor a rakéta sebességének nemcsak a nagyságát, hanem az irányát is ismerni kell. Számos érdekes kérdésre azonban, mint láttuk, enélkül is választ kaphatunk, s hogy eredményeink mennyire helytállóak, az újságokban később közölt valódi pályaadatokkal ellenőrizhetjük.

Maradt természetesen egy alapvető feltevés, melynek jogossága csak bizonyos határok között fogadható el. Feltettük ugyanis, hogy csak egy test, pontosabban egy tömegpont vonzása hat a mesterséges égitestre, noha tudjuk, hogy a valóságban nem ez a helyzet: a Földhöz közel keringő égitesteknél a Föld lapultsága, a távolabbra repülőknél más égitestek (pl. Hold) vonzása már nem elhanyagolható tényező. Felléphetnek továbbá nem gravitációs jellegű erők is, mint például a földi légkör közegellenállása. Ezek a tényezők általában néhány nap után már nagyobb mértékben módosítják a kezdeti pályát, s ha a test egy másik égitest közelébe kerül (pl. holdrakéta), pályája teljesen meg is változhat. Általában eredményesen alkalmazható azonban egy közelítő eljárás, mely a Földről egy másik égitest közelébe tartó rakéta pályáját szakaszokra bontja, s egy–egy szakaszon belül csak egyetlen égitest vonzását veszi figyelembe, tehát úgy számol, ahogy az eddigiekben tettük. Úgy tekintjük tehát, hogy egy a Hold felé induló rakéta pályáját például indulástól a Hold 66 000 km sugarú környezetéig csak a Föld, az említett körzeten belül viszont csak a Hold vonzása alakítja ki. A Földtől 930 000 km távolságot elérve már csak a Nap vonzerejével számolunk. Anélkül, hogy ezen egyszerű, és közelítő számításokra kiválóan alkalmas módszert részletesen ismertetnénk, megállapíthatjuk, hogy kezdeti, látszólag speciális feltételeink a mesterséges égitestek életének legnagyobb részében teljesülnek, tehát a megadott egyszerű képletekkel hozzávetőlegesen csaknem minden asztronautikai pályaproblémát megoldhatunk. Úgy vélem, hogy aki egy–egy űrhajózási terv nyilvánosságra hozatala vagy megvalósítása idején maga is ilyen számítgatásokat végez, közelebb jut ahhoz, hogy értékelni tudja korszakunk e kiemelkedő tudományos eseményeinek jelentőségét.

Gyakorló feladatok:

2. a rakéták jelgyorsítási szakasza végtelen rövid, közben gravitációs veszteségek nincsenek;

3. a mozgás kezdettől fogva közegellenállás nélküli térben történik. (További feladatokat a „Kitűzött feladatok” között fogunk találni mostani számunkban és a későbbi számokban.)*Általános feltevések:* 1. *A Föld körpályán,* 29,77 km/sec *sebességgel kering a Nap körül;*

2. *a rakéták jelgyorsítási szakasza végtelen rövid, közben gravitációs veszteségek nincsenek;*

3. *a mozgás kezdettől fogva közegellenállás nélküli térben történik. (További feladatokat a „Kitűzött feladatok” között fogunk találni mostani számunkban és a későbbi számokban.)*

1. Számítsuk ki egy ellipszispályán mozgó mesterséges hold sebességét a földközelpontban és a földtávolpontban! Milyen távolságban és pályája mely pontjában lesz a hold sebessége éppen e két sebesség mértani közepe?

2. Tudjuk, hogy 1000 km-re a földfelszíntől, hozzánk képest $4{,}00$ *km/sec sebességgel ismeretlen irányban mozog egy mesterséges égitest. Ha motorjait nem kapcsolja be újra, mekkora az a legnagyobb távolság, ameddig eltávolodhat a földfelszíntől? Ha keringést végez a Föld körül, mekkora a keringési idő? Mi lehet az égitest további sorsa?*

A feladatok megoldása

1. $v_p = v_{kör}\sqrt{\dfrac{1+e}{1-e}}$; $v_a = v_{kör}\sqrt{\dfrac{1-e}{1+e}}$; *a Föld középpontjától a távolságban, vagyis a kistengely végpontjaiban.*

(Az r_p *és* r_a*-t helyettesítjük az energiaintegrál képletébe. A két sebesség mértani közepe* $v_{kör}$*, mely az a távolsághoz tartozik.)*

2. 1990 km; 45 perc; keringés nem jöhet létre, az égitest visszazuhan a földre.

(A legnagyobb magasságot akkor éri el, ha radiálisan távolodik, ekkor $r_a = 2a$*. A megadott két adatból az energiaintegrállal a kiszámítható, ebből Kepler 3. törvényével a keringési idő.)*

Dr. Almár Iván