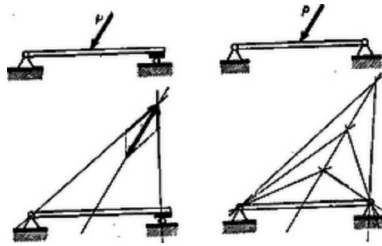


A középiskolai statika anyag csak „merev” testekkel foglalkozik, és ha olyan feladat fordul elő, amely merev testekre megismert törvényekkel nem oldható meg, akkor azt szokták mondani, hogy „a feladat statikailag határozatlan”. Ilyen feladatokkal kapcsolatban gyakran találkozunk téves nézetekkel. Például vannak, akik azt hiszik, hogy ezeknek a feladatoknak nincs is megoldása. – Alább egy statikailag határozott és egy statikailag határozatlan feladatot oldunk meg és hasonlítunk össze. Látni fogjuk, hogy a statikailag határozatlan feladatnak is van egyértelmű megoldása; és tisztázni fogjuk, hogy egy test mikor tekinthető „merev” testnek.



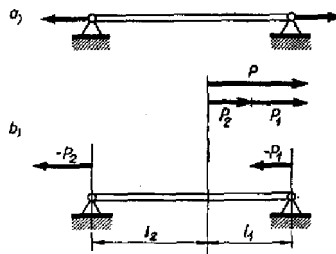
1. feladat: Tekintsünk egy rudat, melyet adott külső erő terhel, és egyik végén csuklósan kapcsolódik az alaphoz, a másik végén görgőn támaszkodik. (Hidakat szoktak így építeni.) Kérdés: mekkora erő hat a csuklónál?

2. feladat: Az előző feladathoz képest csak annyi a változás, hogy a rúd másik végén is csukló van.

Megoldás: A rúd súlyát elhanyagoljuk. Az 1. feladat megoldása egyszerű geometriai szerkesztésre vezet. A rúd egyensúlyban van, ezért a rá ható erők eredője zérus. A görgőnél ható erő hatásvonala merőleges a támaszkodási felületre. A csuklónál ható erő hatásvonala átmegy a csukló középpontján. Ezeket felhasználva az erők az ábra szerint szerkeszthetők. – Ha a 2. feladatnál hasonló módon indulunk el, akkor csak annyit tudunk mondani, hogy a hatásvonalak metszéspontja P erő hatásvonalán van, de a hatásvonalon elfoglalt helye határozatlan. A feladat tehát „statikailag határozatlan”.

A 2. feladat általános megoldása messze meghaladja a középiskolai ismereteket. Könnyen meg tudjuk oldani azonban speciális terhelő erők esetén. A statikailag határozatlan feladatok tulajdonságai ezekből az egyszerű esetekből is jól láthatók.

a) *A terhelő erő zérus.* Itt azokat a tényezőket ismertetjük, melyeket a gyakorlatban figyelembe szoktak venni. Képzeljük azt az esetet, hogy egy ismert méretű rúd kell két csukló közé helyezni. Mivel a rúdnek a csuklók közé helyezendő hossza biztosan nem egyezik a csuklók távolságával, ezért, ha a csuklók nem mozdulhatnak el, akkor beszereléskor a rúd erőhatással (húzás, nyomás) kell helyére tenni, tehát rugalmas alakváltozásra kell számítani. A rugalmas alakváltozás ismert képlete szerint az erő: $P = EF\Delta l/l$.



A beszerelt rúdban az erőhatás az idő folyamán megváltozik, ha a hőmérséklet is változik. Ezt a következő módon lehet figyelembe venni: a lineáris hőtágulás képletével megállapítjuk, hogy az új hőfokon mekkora lenne beszerelés előtt a rúd hossza. Ebből számítunk rugalmas megnyúlást és erőt.

P1.: $F = 1 \text{ cm}^2$ keresztmetszetű $l = 3 \text{ m}$ hosszú acélrúd szereléskor $\Delta l = 3 \text{ mm}$ -rel rövidebb a csuklók távolságánál. Mekkora erő ébred a nyári szereléskor, és télen, 40 C° -kal hidegebb időben? (Acélra: $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2$, és a lineáris hőtágulási együttható $\alpha = 11,5 \cdot 10^{-8}/\text{C}^\circ$. A szereléskor: $P = 2 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2 \cdot 1 \text{ cm}^2 \cdot 10^{-3} = 2000 \text{ kp}$. A hőmérsékletváltozás miatt a rúd rövidülése: $\alpha \cdot l \Delta t = 1,4 \text{ mm}$, tehát télen a megnyúlás: $4,4 \text{ mm}$, és az erő $P = 2930 \text{ kp}$. A megnyúlással járó keresztmetszet-csökkenéstől, mint szoktuk, eltekintünk.)

b) *A terhelő erő a rúd tengelyébe esik.* Az erőhatás két részből tevődik össze: a terheletlen rúdban ébredő előbb részletezett erőhatás, és a terhelés hatására ébredő erő; az eredő erő a kettő összege. Itt csak a terhelés hatására ébredő erőhatást vizsgáljuk (b) ábra). A P terhelés a csuklókon megoszlik: $P = P_1 + P_2$. A terhelés hatására az l_1 rész rövidül, az l_2 rész megnyúlik. A rövidülés és nyúlás egyenlő, tehát a rugalmas megnyúlás képletét használva:

$$\frac{P_1 \cdot l_1}{E \cdot F} = \frac{P_2 \cdot l_2}{E \cdot F},$$

amiből egyszerűsítés után azt kapjuk, hogy a P erő a csuklókon úgy oszlik meg, hogy az erőhatás a támadási pontnak a csuklóktól mért távolságával fordítva arányos. (Mennél közelebb van P erő támadáspontja az egyik csuklóhoz, annál nagyobb erő jut a csuklóra.) Az erőhatások így kiszámíthatók.

Az a) és b) feladatok megoldásából látható, hogy *statikailag határozatlan feladat esetén is egyértelműen meghatározott erőhatás ébred*. Ezen erőhatás a rugalmas alakváltozásokból kiszámítható.

Az 1. és 2. feladat összehasonlításából látható, hogy ugyanaz a rúd az 1. feladatban „merev” testnek tekinthető, a 2. feladat esetében azonban rugalmas testnek kellett tekinteni. Ezek szerint nem csupán a test keménysége dönti el, hogy a test merev testnek tekinthető-e? – Mikor jogos merev testről beszélni? Vizsgáljuk meg ismét az 1. és 2. feladatot: merev test nincs, a rúd az 1. feladat esetén is rugalmas, a P terhelő erő hatására kissé behajlik, rövidül stb. Ezt az alakváltozást azonban a rúd végén levő görgő elmozdulása akadály nélkül lehetővé teszi. A 2. feladatnál a rugalmas alakváltozást a csukló akadályozza. Azt mondhatjuk:

Egy kemény test akkor tekinthető merev testnek, ha kicsiny alakváltozásai akadályba nem ütköznek. Ez felismerhető abból, hogy erőhatás nélkül a helyére szerelhető, hőmérsékletváltozások esetén a szabad terjeszkedés biztosítva van, erőhatások következtében létrejövő alakváltozása akadály nélkül lehetséges. – A test keménységén itt pontosabban szólva azt értjük, hogy a terhelés hatására létrejövő alakváltozások viszonylag kicsinyek.

A *statikailag határozatlan* feladatokat az jellemzi, hogy az előbb felsorolt feltételek nem teljesülnek. Több más módon is jellemezhetők, a testek nem tekinthetők merev testeknek, a megoldásnál a testek kicsiny alakváltozásait is figyelembe kell venni.

Fáy Árpád