I. megoldás. Nyilvánvalóan $k \geq 3$, így az R, r_k és a szabályos k-szög a_k oldalának fele által alkotott derékszögű háromszögből

$$r_k = R\cos\frac{\pi}{k},$$

tehát (R-rel végigosztva) azt kell bizonyítanunk, hogy

$$(n+1)\cos\frac{\pi}{n+1} - n\cos\frac{\pi}{n} > 1 \quad (=\cos 0), \tag{1}$$

más szóval, hogy

$$n\left(\cos\frac{\pi}{n+1} - \cos\frac{\pi}{n}\right) > \cos 0 - \cos\frac{\pi}{n+1}.$$

Mindkét különbség pozitív, így ez az egyenlőtlenség akkor és csak akkor teljesül, ha a bal és jobb oldalának hányadosa nagyobb, mint 1. Szorzattá alakítással

$$\frac{n\left(\cos\dfrac{\pi}{n+1} - \cos\dfrac{\pi}{n}\right)}{\cos 0 - \cos\dfrac{\pi}{n+1}} = \frac{n\sin\dfrac{\pi/2}{n(n+1)}}{\sin\dfrac{\pi/2}{n+1}} \cdot \frac{\sin\dfrac{2n+1}{n}\cdot\dfrac{\pi/2}{n+1}}{\sin\dfrac{\pi/2}{n+1}}. \tag{2}$$

Itt a második tényező nagyobb 1-nél, hiszen egyrészt

$$\frac{2n+1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{4} < 1,$$

ezért

$$\frac{\pi}{2} > \frac{2n+1}{n}\cdot\frac{\pi/2}{n+1} > \frac{\pi/2}{n+1} > 0,$$

másrészt mert a sinus függvény a $(0, \pi/2)$ nyitott intervallumban monoton növekvő és pozitív.

(2) első tényezője egyszerűbben így írható

$$\frac{n\sin x}{\sin nx}, \tag{3}$$

ahol

$$x = \frac{\pi/2}{n(n+1)} \quad \text{és így} \quad 0 < x < nx < \frac{\pi}{2};$$

erről teljes indukcióval mutatjuk meg, hogy mindig nagyobb 1-nél, ha n természetes szám.

$n = 2$ esetén, $0 < \cos x < 1$ alapján

$$2\sin x > 2\sin x\cos x = \sin 2x,$$

állításunk helyes. Feltéve mármost, hogy az n természetes számra (3) értéke nagyobb 1-nél, vagyis hogy más alakban

$$(0 <) \sin nx < n\sin x, \text{ akkor}$$
$$\sin(n+1)x = \sin nx\cos x + \cos nx\sin x < \sin nx + \sin x <$$
$$< n\sin x + \sin x = (n+1)\sin x,$$

tehát a tulajdonság valóban öröklődik (a cosinusok helyett 1-et írva mindkét szorzatot nagyobbal pótoltuk).

Ezek szerint (2) mindig nagyobb 1-nél, és ez az előrebocsátottak szerint egyértelmű a feladat állításával.

Gáspár Gyula (Miskolc, Herman O. Gimn., II. o. t.)

Megjegyzés. Alsó korlátot kapunk $\cos(\pi/m)$-re, ha (1)-et felírjuk az $n+1 = 4, 5, \ldots, m$ értékekre és a kapott egyenlőtlenségeket összeadjuk. Átrendezéssel

$$m\cos\frac{\pi}{m} > (m-3) + 3\cos\frac{\pi}{3} = m - \frac{3}{2},$$
$$\cos\frac{\pi}{m} > 1 - \frac{3}{2m} \quad (m \geq 4).$$

Jobb a becslés, ha csak az $n+1 = 7, 8, \ldots, m$ értékekre szorítkozunk

$$m\cos\frac{\pi}{m} > (m-6) + 6\cos\frac{\pi}{6} > m - 1,$$
$$\cos\frac{\pi}{m} > 1 - \frac{1}{m} \quad (m > 7).$$

Az iskolai függvénytáblázatok[1] 18. táblázata (58. o.) ϱ/r oszlopának adatai szerint $m \geq 10$-re már $\cos \pi/m > 1-1/2m$ is áll, $m \geq 15$-re pedig $1-1/3m$ is.

II. megoldás. Legyen röviden

$$\frac{\pi}{n+1}=\alpha, \quad \frac{\pi}{n}=\beta, \quad \text{azaz} \quad n+1=\frac{\pi}{\alpha}, \quad n=\frac{\pi}{\beta}.$$

Ezeket (1)-be beírva, majd π-vel osztva a bizonyítandó egyenlőtlenség (csupa megfordítható átalakítással) így írható:

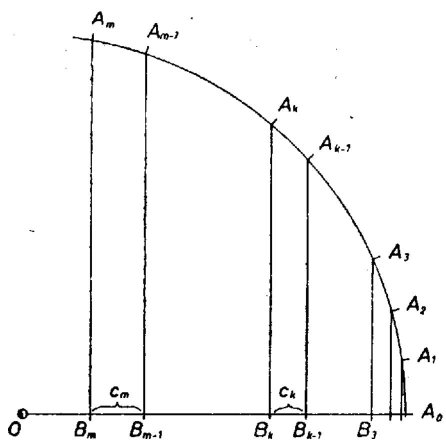
$$\frac{1}{\alpha}\cos\alpha-\frac{1}{\beta}\cos\beta>\frac{(n+1)-n}{\pi}=\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta},$$

$$\frac{1-\cos\alpha}{-\alpha}>\frac{1-\cos\beta}{-\beta} \quad \left(0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}\right). \tag{4}$$

Ha van olyan ω, melyre $\alpha=k\omega$, $\beta=m\omega$ ($k<m$, természetes számok), akkor (4) bizonyítása a következő: azt kell belátnunk, hogy

$$\frac{1-\cos\alpha}{k\omega}<\frac{1-\cos\beta}{m\omega}.$$

Legyen az egységsugarú, O középpontú kör A_0A_j ívéhez tartozó középponti szög $j\omega$ ($j=1,\ 2,\ \ldots,\ m$), és jelöljük az A_j pont vetületét az OA_0 egyenesen B_j-vel, a B_jB_{j-1} szakasz hosszát c_j-vel ($j=1,\ 2,\ \ldots,\ m$).



1. ábra

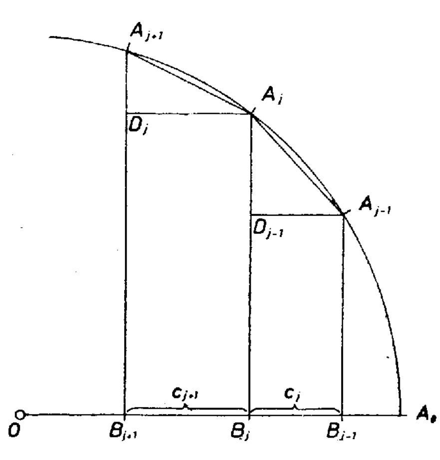
Mivel $\cos\alpha=OB_k$, $\cos\beta=OB_m$, azt kell megmutatnunk, hogy (1. ábra):

$$\frac{1}{k}(c_1+c_2+\ldots+c_k)<\frac{1}{m}(c_1+c_2+\ldots+c_m).$$

Megmutatjuk, hogy a c_j számok monoton nőnek:

$$c_{j+1}>c_j.$$

Legyen A_j, ill. A_{j-1} vetülete az $A_{j+1}B_{j+1}$, ill. A_jB_j egyenesen D_j, ill. D_{j-1}. Az $A_jD_jA_{j+1}$, $A_{j-1}D_{j-1}A_j$ derékszögű háromszögek átfogója egyenlő, az elsőnek A_{j+1}-nél levő szöge, $(j+1/2)\,\omega$, nagyobb, mint a másodiknak A_j-nél levő, $(j+ +1/2)\,\omega$ nagyságú szöge, tehát e szögekkel szemközti befogók közül az elsőé a nagyobb, $A_jD_j>A_{j-1}D_{j-1}$, vagyis $c_{j+1}>c_j$ (2. ábra).



2. ábra

[1] *Hack F.:* Függvénytáblázatok, matematikai összefüggések. Tankönyvkiadó, Budapest, 1969.

Legyen most

$$d_j = \frac{1}{j}(c_1 + c_2 + \ldots + c_j),$$

ekkor elegendő megmutatnunk, hogy $d_j < d_{j+1}$:

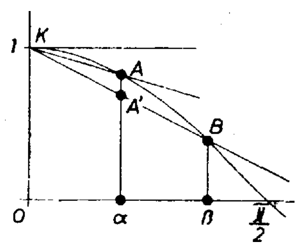
$$\frac{c_1 + c_2 + \ldots + c_j}{j} < \frac{c_1 + c_2 + \ldots + c_j + c_{j+1}}{j+1},$$

$$(j+1)(c_1 + c_2 + \ldots + c_j) < j(c_1 + c_2 + \ldots + c_j + c_{j+1})$$

$$c_1 + c_2 + \ldots + c_j < jc_{j+1},$$

ami valóban igaz, hiszen a bal oldali összeg minden tagja kisebb c_{j+1}-nél. Ezzel bebizonyítottuk (4)-et minden olyan esetre, amikor $\frac{\alpha}{\beta}$ racionális. Ez pedig feladatunkban fennáll, mert $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{n}{n+1}$.

Megjegyzések. 1. Szemléletes értelmezését adjuk (4)-nek. A két oldalon a $\cos x$ függvényt ábrázoló görbe két húrjának iránytangense áll, éspedig a $(0,\, \beta)$, ill. $(0,\, \alpha)$ intervallum fölötti KB, ill. KA görbeív végpontjait összekötő húré (3. ábra).



3. ábra

Fogadjuk el a szemlélet alapján (azaz bizonyítás nélkül), hogy $\cos x$ grafikonja a $(0,\, \pi/2)$ intervallumban konkáv (alulról, vagyis az y tengely pozitív irányába nézve), ami azt jelenti, hogy bármely részívének végpontjait összekötve, az ív a kapott húr fölött halad. Eszerint, az α pontbeli ordinátaegyenes és KB metszéspontját A'-vel jelölve, $\alpha A' < \alpha A$, így a KA' egyenes meredekebben süllyed, mint KA, tehát (4) bal oldala valóban nagyobb (kisebb abszolút értékű negatív szám), mint a jobb oldala.

Angyal József (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., III. o. t.)

2. Az elfogadott állítást némileg alátámasztja, hogy bármely x_1, x_2-re, hacsak

$$-\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2},$$

a $\cos x$ grafikonján az $(x_1,\, x_2)$ intervallum fölötti ív végpontjait összekötő húr *felezőpontja* alatta van az ívnek. Ennek koordinátái ugyanis

$$\frac{x_1 + x_2}{2}, \quad \frac{\cos x_1 + \cos x_2}{2},$$

és

$$\cos\frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{\cos x_1 + \cos x_2}{2} = \cos\frac{x_1 + x_2}{2}\left(1 - \cos\frac{x_2 - x_1}{2}\right) > 0,$$

mert mindkét tényező pozitív, hiszen

$$\frac{x_2 - x_1}{2} < \frac{\pi}{2}.$$

3. Más alátámasztása a konkávságnak: $\cos x$ deriváltja, érintőjének iránytangense $-\sin x$, és ez a mondott $(0,\, \pi/2)$ intervallumban monoton csökken, a görbe lefelé „kanyarodik” (a második derivált: $(\cos x)'' = -\cos x < 0$).