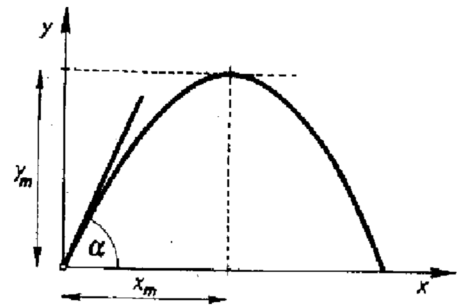
Hajítási feladatok megoldása szerkesztéssel

A ferde hajítási feladatok megoldására jól használhatók a szerkesztési eljárások. A ferde hajítást meghatározza c kezdősebessége és e sebesség α szöge. t másodperckor az elhajított tárgy vízszintes koordinátája $c \cdot \cos\alpha \cdot t$, függőleges koordinátája $c{\cdot}\sin\alpha{\cdot}t{-}\frac{g}{2}{\cdot}t^2$, az emelkedés ideje $t_m = c\sin\alpha/g$, az emelkedés magassága az elindítási pont magasságához viszonyítva $y_m = c^2 \cdot \sin^2\alpha/2g$, és a tetőzési pont vízszintes koordinátája $x_m = c^2 \cdot \sin\alpha\,\cos\alpha/g$. Vízszintes síkon mérve a hajítás távolsága ennek kétszerese (1 ábra).



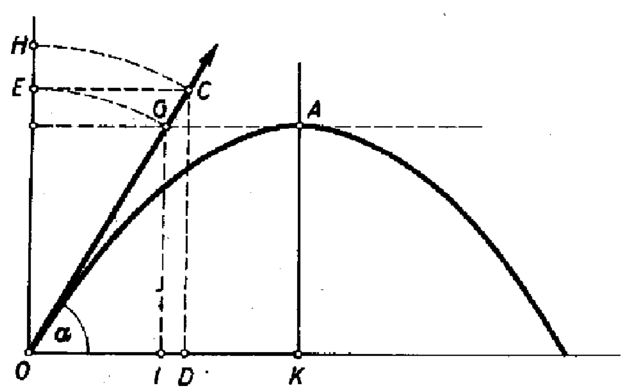
1. ábra

A ferde hajítás képleteiben állandóan előfordul a

$$h = \frac{c^2}{2g} \tag{1}$$

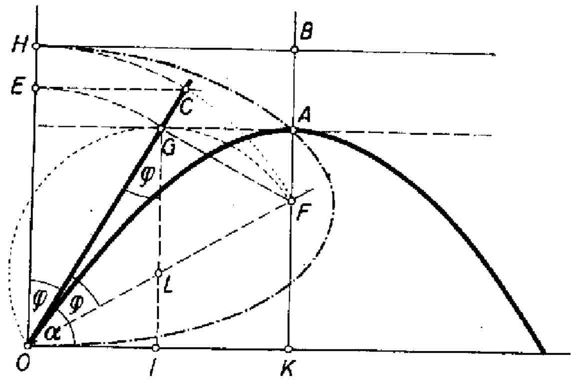
mennyiség, amely a c kezdősebességgel függőlegesen felfelé hajított tárgy emelkedési magassága. Ennek felhasználásával a ferde hajításra vonatkozó képleteink:

$$y_m = h \cdot \sin^2\alpha, \quad x_m = 2h \cdot \sin\alpha\cos\alpha.$$



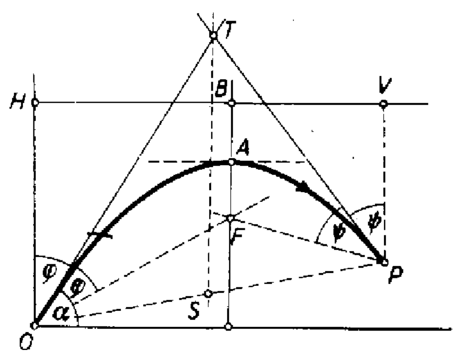
2. ábra

A szerkesztési eljárás ezek után a következő. Az adott c kezdősebességből (1) szerint kiszámítjuk a hajításra jellemző h mennyiséget. Ezt az elhajítás pontjában függőlegesen felmérjük (2. ábra): $h = OH$. Azután felrajzoljuk az elhajítás α szögét és O-ból mint középpontból h rádiusszal megrajzoljuk a HC körívet: $OC = OH = h$. Így $DC = h\sin\alpha$. A CD magasságot vízszintesen átvetítjük az O pontban emelt merőlegesre, ekkor kapjuk az $OE = h\sin\alpha$ magasságot, majd OE rádiusszal ismét körívet rajzolunk O középpont körül. Ez az ív az α szög szárát G-ben metszi: $OE = OG$. Az IG magasság $IG = OG \cdot \sin\alpha = h \cdot \sin^2\alpha$, megadja a parabola y_m tetőpontmagasságát, tehát a hajítási parabola csúcsa valahol a G-ponton átmenő vízszintes egyenesen fekszik. A parabola tengelyének helyét megkapjuk, ha az $OI = OG \cdot \cos\alpha$ távolság kétszeresét mérjük fel: $OK = 2 \cdot OI$. A hajítási parabola tengelye a K-ponton átmenő függőleges egyenes, ennek metszéspontja a G-ponton átmenő vízszintessel adja meg A-ban a parabola csúcsát.



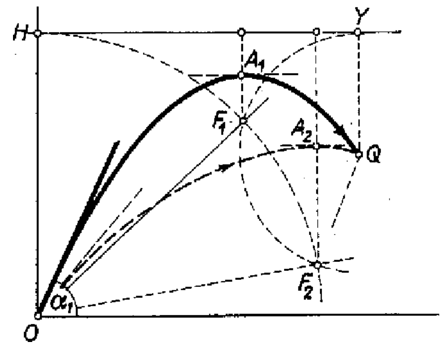
3. ábra

Következik a fókuszpont megkeresése. Az α szög O-pontból kiinduló ferde szára a parabola érintője, és ez a tengellyel párhuzamos OH egyenessel φ szöget zár be. Ha ugyanezt a φ szöget az OC egyenes másik oldalán is felmérjük, olyan egyenest, vezérsugarat kapunk, amely átmegy a fókuszon, metszéspontja az AK tengellyel a parabola F fókusza. (3. ábra). További érdekességek is következnek. L pont megfelezi az OF távolságot, mert I felezi OK-t. Váltószögekről lévén szó, $OGL\sphericalangle = HOG\sphericalangle = \varphi$, de $GOL\sphericalangle$ is φ-vel egyenlő szerkesztésünk folytán, ezért OLG háromszög egyenlőszárú, és $GL = OL$. Így L középponttal megrajzolható az OGF félkör és az $OGF\sphericalangle$ derékszög. Az OCE háromszög és OFG háromszög egybevágó, mert mindegyik derékszögű, mindegyikben megtalálható a φ szög és $OE = OG$. Az egybevágóságból igen nevezetes dolgok következnek. Először is $OF = OH = h$. Tehát a fókusznak a kilövési ponttól mért távolsága megegyezik a h függőleges hajítási magassággal. Minthogy ez az állítás független az α szög nagyságától, bebizonyítottuk, hogy az egyező sebességgel, de különböző szögekkel létrejövő parabolapályák fókuszainak mértani helye egy kör, melynek középpontja O és rádiusza h (a 3. ábra pontozott köre). Ezt a tételt egyébként analitikai geometriai módszerrel szokás bebizonyítani. A további következmény, hogy a HB egyenes valamennyi hajítási parabola közös vezérvonala, mert O pontnak, mint a parabola egy pontjának egyenlő távolságban kell lennie a fókusztól és a vezérvonaltól. A parabola csúcspontját megkapjuk, ha a fókusz és vezérvonal függőleges távolságát (FB) megfelezzük (A). Ezt kell tennünk minden α szög esetében. Ebből azonnal következik, hogy a csúcspontok mértani helye olyan ellipszis, amelynek teljes kistengelye $OH = h$ és tengelyaránya $1 : 2$. Szintén olyan eredmény, amelyet egyébként analitikai geometriai módszerrel szoktak bebizonyítani.



4. ábra

Két példán vizsgáljuk meg, miképpen használható ilyen szerkesztéses módszer a feladatmegoldásban. Egyik feladatunk úgy szól, hogy adott O pontból adott α szög alatt elindítva kell eltalálni P pontot, és keresendő az ehhez szükséges inditási sebesség (4. ábra). Kössük össze O és P pontot, azután e távolság S felezőpontjában rajzoljunk függőleges egyenest. Ennek az α szög szárával adott T metszéspontja adja meg a P-n átmenő parabolaérintő egy pontját is. A $HOT\sphericalangle = \varphi$ szöget és $VPT\sphericalangle = \psi$ szöget az érintők másik oldalára felmérve megkapjuk F fókuszpontot. O-ban és P-ben a függőleges segédegyenesekre rámérve az OH, illetve PV távolságot, megkapjuk a HV vezérvonalat, azután BF felezőpontjában az A csúcspontot. Az $OH = h$ távolságból (1) alapján kiszámíthatjuk a c indítási sebességet.



5. ábra

Másik példánk úgy szól, hogy O pontból adott c kezdősebességgel indított ferde hajítással el kell találni az adott Q pontot (5. ábra). Először O-ban függőlegesen felmérjük az adott c-hez (1)-alapján hozzátartozó $h = OH$ távolságot. O-ból mint középpontból OH rádiusszal, Q-ból mint középpontból QY rádiusszal egy–egy kört rajzolunk. Ezek F_1, illetve F_2 metszéspontjai a megoldást jelentő parabolák fókuszai, mert a parabola alaptulajdonságából következik, hogy $OH = OF_1$, illetve $QY = QF_2$. Az F_1 fókusztól a vezérvonalig terjedő távolság felében van az A_1 csúcspont. A feladatnak két megoldása van; a másik parabola F_2 fókuszából ugyanúgy lehet megkapni A_2 csúcspontját. Az elhajítás irányait a HOF_1 illetve HOF_2 szögek szögfelezői határozzák meg. Q pont általában két hajítási pályán található el ugyanazon kezdősebesség mellett, egy magasabb és egy laposabb röppályán. Ha a szerkesztéshez szükséges körök nem metszik egymást, az adott c sebességgel nem lehet Q-t eltalálni. Ha $OQ = OH + QY$, akkor csak egy parabola a megoldás, és Q a hajítási parabolák burkológörbéjén fekszik. Ezen Q pontok mértani helye olyan parabola, melynek fókusza O, paramétere $2OH$, csúcsa H-ban van. Így számítás nélkül, szerkesztéssel bizonyítható be a hajítási parabolák burkológörbéjének tulajdonsága (lásd KML XXI. kötet 225. oldal). A ferde hajítási feladatok egyéb eseteiben is jó áttekintést nyújthat a szerkesztéses eljárás, például az 1960. évi állami tanulmányi verseny második fordulójának 3. feladatát Bollobás Béla és Horváth Sándor szerkesztéssel oldották meg.

Vermes Miklós