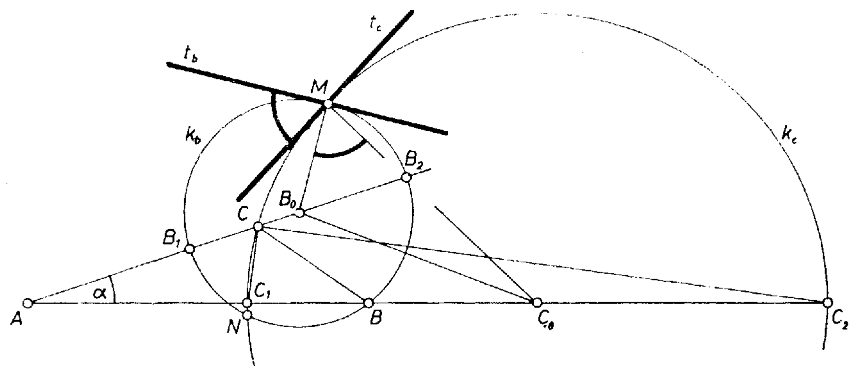
Válasszuk úgy az ABC háromszög betűzését, hogy a szokásos jelölésekkel $a < b < c$ teljesüljön. Az állítást a C és B csúcsokból kiindulva kapott körökre bizonyítjuk, ennek mintájára végezhető a bizonyítás a további két körpár esetére is.



Legyen a C-ből induló belső és külső szögfelezőnek az AB egyenessel való metszéspontja C_1, ill. C_2, a C_1C_2 szakasz fölötti k_c Thalész-kör középpontja C_0, a B-ből kiindulva ugyanígy kapott pontok és kör rendre B_1, B_2, B_0, k_b, végül k_b és k_c egyik metszéspontja M. A körök M-beli t_c, t_b érintőjét M körül $90°$-kal elfordítva a megfelelő sugarak MC_0, MB_0 egyenesét kapjuk, így elegendő azt belátni, hogy a $B_0MC_0\sphericalangle$ értéke $60°$ vagy $120°$, azaz hogy

$$\left|\cos B_0MC_0\sphericalangle\right| = \frac{|MB_0^2 + MC_0^2 + B_0C_0^2|}{2MB_0\cdot MC_0} = \frac{1}{2} \tag{1}$$

$a < b$ miatt C_1, C_2 az A-nak ugyanazon oldalán vannak, mint B és így C_0 is ezen az oldalon van, ennélfogva a szögfelezők osztásarányának tétele alapján

$$AC_0 = \frac{AC_1}{2} + \frac{AC_2}{2} = \frac{bc}{2(b+a)} + \frac{bc}{2(b-a)} = \frac{b^2c}{b^2-a^2},$$

és ugyanezekkel a szakaszokkal

$$MC_0 = C_1C_0 = \frac{AC_2 - AC_1}{2} = \frac{abc}{b^2-a^2};$$

továbbá hasonlóan

$$AB_0 = \frac{c^2b}{c^2-a^2}, \quad MB_0 = B_1B_0 = \frac{abc}{c^2-a^2}.$$

Ezekkel az (1)-beli számláló, a cosinustételt az AB_0C_0 háromszögre és az ABC háromszögre alkalmazva:

$$\left|(MB_0^2 - AB_0^2) + (MC_0^2 - AC_0^2) + 2AB_0\cdot AC_0\cos\alpha\right| =$$
$$= \left|-\frac{b^2c^2}{c^2-a^2} - \frac{b^2c^2}{b^2-a^2} + \frac{b^2c^2(b^2+c^2-a^2)}{(b^2-a^2)(c^2-a^2)}\right| = \frac{a^2b^2c^2}{(b^2-a^2)(c^2-a^2)} = MB_0\cdot MC_0,$$

tehát (1) valóban fennáll. Ezt akartuk bizonyítani.

Horváthy Péter (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., IV. o.t.)