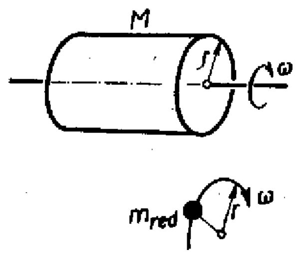
A mozgásfeladatok megoldása nehezen áttekinthető, ha testek összetett mozgásáról van szó (pl. haladó és forgó mozgásról egyszerre), vagy ha sok egymással kapcsolatban levő test mozog. Ebben a cikkben egy olyan módszerrel foglalkozunk, melyet ilyen feladatok megoldására gyakran használnak a fizikában és a műszaki gyakorlatban is.

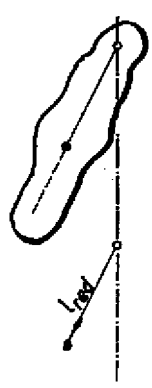
A módszer lényege: Az eredeti bonyolult mozgás helyett egy másik sokkal egyszerűbb mozgást vizsgálunk. Az elképzelt egyszerűbb mozgásban szereplő testeket gyakran *modellnek* nevezik. A modellben szereplő tömegeket és méreteket úgy kell megválasztani, hogy az eredeti mozgást az általunk vizsgált szempontból helyettesíteni tudja. Néhány példa:



1. ábra

Forgó henger mozgását helyettesíteni szokták egyetlen tömegpont forgó mozgásával, mely a henger sugarával egyenlő sugarú pályán mozog. Azt akarjuk biztosítani, hogy egyforma külső forgatónyomatékok hatására a henger és a modell szögsebessége pillanatról pillanatra megegyezzék. Ehhez elég azt biztosítani, hogy egy kezdeti időpillanatban a szögsebességek megegyezzenek, és minden további időpillanatban a szöggyorsulások egyezzenek. Ez a forgatónyomatékok és szöggyorsulások ismert összefüggése alapján akkor teljesül, ha a henger és a modell tehetetlenségi nyomatéka egyezik. Egyszerű számítás szerint a tehetetlenségi nyomatékok egyenlők, ha a modell tömege $m_{\mathrm{red}} = M/2$. Ha tehát a modell tömegét így választjuk meg, akkor mozgása helyettesíti a henger mozgását. Az m_{red} tömeget *a henger r sugárra redukált tömegének* nevezik. (Nincs akadálya annak sem, hogy a henger tömegét más sugarú pályára „redukáljuk”, csak a tehetetlenségi nyomatékok egyenlőségét kell biztosítani.) A modell bevezetése nem felesleges komplikáció, de valóban egyszerűsíti a viszonyokat. Ezt láthatjuk például abból is, hogy a henger mozgási energiája milyen egyszerűen számítható ki a modell segítségével: a hengernek és a modellnek a mozgási energiája egy időpillanatban, amikor mindkettő ω szögsebességgel forog, egyenlő. Ugyanis az ω szögsebességre való felpörgetés alatt az egyforma forgatónyomatékok nyilván egyforma munkát végeztek; és ez a munka alakult át egyszer a henger, másrészt a modell mozgási energiájává. A modell mozgási energiája egyszerűen számítható az m_{red} tömeg pillanatnyi $r\omega$ kerületi sebességéből:

$$E_m = m_{\mathrm{red}} \cdot (r\omega)^2/2 = (M/2) \cdot (r\omega)^2/2.$$



2. ábra

Második példa a *fizikai inga* helyettesítése *matematikai ingával.* Itt például a lengésidők egyenlőségét a redukált hossz helyes megválasztása biztosítja. Harmadik példa: Egy elég *nagy tömegű rugóra* függesztett test rezgőmozgásáról van szó. Ezt a mozgást helyettesíthetjük *tömeg nélküli rugóra* függesztett test mozgásával, ha a rugó tömegének bizonyos hányadát a rezgő tömeghez számítjuk. (Normális alakú rugónál a rugók tömegének 1/3 részét kell a rezgő tömeghez redukálni.) Sokkal bonyolultabb rezgő rendszereket is szoktak ezzel az egyszerű modellel helyettesíteni.

3. ábra

Visszatérve eredeti célunkhoz, több test összetett mozgását vizsgáljuk egy *lendkerekes játékautó* példáján. Az autó egyes részei csak haladó mozgást végeznek, a lendkerék haladó és forgó mozgást is végez. Látni fogjuk, hogy ez a több testből álló, többféle mozgást végző rendszer egy egészen egyszerű modell mozgásához vezet.

A játékautó futókerekének sugara $R = 1$ cm, lendkerekének sugara $r = 1{,}5$ cm. A játékautó tömege $M = 140$ g, ebből $m = 40$ g jut a lendkerékre. Két fogaskerékáttétel van, így a lendkerék $i = 14$ fordulatához tartozik a futókerék egy fordulata. (Ezek egy játékautóról lemért méretek kerekítve.) Kérdés: A játékautó $P = 1$ kp tolóerő hatására mekkora gyorsulással mozog, és álló helyzetből indulva mekkora lesz a sebessége $s = 1$ m út befutása után.

A súrlódást elhanyagolva az autó mozgási energiája az út végén az adatokból számítható: $P \cdot s$. Jó lenne ismerni a v sebességgel haladó autó mozgási energiáját. Ennek számításánál az okoz problémát, hogy a lendkerék összetett mozgása miatt a v sebességű haladómozgáson kívül ω szögsebességű forgó mozgás is van. Ilyen esetben a mozgási energiát a *csak haladó* és a *csak forgó* mozgást végző test energiájának összege adja:

$$E_m = E_{\text{haladó}} + E_{\text{forgó}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m_{\text{red}}(r\omega)^2.$$

Ennek igazolására képzeljük el, hogy a lendkereket egyelőre függetlenítjük a fogaskerekektől, és összetett mozgását úgy hozzuk létre, hogy először felgyorsítjuk v sebességre – ezalatt a haladómozgás mozgási energiájának megfelelő munkát fektetünk be – majd az egyenletes v sebességgel haladó autóban felpörgetjük ω szögsebességre. Márpedig az *egyenletes sebességű autóban a felpörgetéshez ugyanakkora erő és energia kell, mint álló autóban.* (Ezt az egészen természetes tényt mindenki érzékelheti, akinek sikerül egyenletes sebességű autóba jutni. Általános fizikai fogalmazását először Galilei adta híres relativitási elvével.)

A játékautó mozgási energiája tehát a haladómozgást végző $(M - m)$ tömeg és az m tömegű lendkerék mozgási energiájának összege. Ez utóbbi a haladó és forgó mozgási energia összege, ahol a forgási energiát a bevezetőben említett példa szerint számíthatjuk. (A fogaskerekek és futókerekek forgási energiáját itt kicsiny tömegük és kisebb szögsebességük miatt elhanyagoltuk. Pontos számítás esetén ezeket a lendkerékhez hasonló módon számításba lehet venni.)

$$E_m = Ps = \frac{1}{2}(M - m) \cdot v^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}\right)(r\omega)^2.$$

Itt v és ω között egy összefüggés van. Ha a futókerék megcsúszás nélkül halad a talajon, akkor szögsebessége: v/R, és a lendkerék szögsebessége a fogaskerék kapcsolat miatt: $\omega = iv/R$. Ezt az előző egyenletbe helyettesítve, csak v az ismeretlen, a tiszta másodfokú egyenletet megoldva $v \simeq 1{,}5$ m/sec.

A lendkerekes autó mozgása áttekinthetőbb lesz, ha helyettesítjük *egyetlen tömeg* ugyanolyan sebességű haladómozgásával. Lehetséges-e ez? Előbb azt vizsgáljuk, hogy ha lehetséges, akkor mekkora legyen a modell tömege? Azt akarjuk biztosítani, hogy a játékautót és a modellt álló helyzetből egyszerre indítva, ugyanazon külső erők hatására a mozgásuk pillanatról pillanatra megegyezzék. Ez csak úgy lehetséges, ha ugyanazon P erő hatására s utat befutva a játékautó és a modell is ugyanazt a Ps energiát raktározza el mozgási energia formájában, vagyis

$$\frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}\right)(r\omega)^2 = \frac{1}{2}m_{\text{red}}v^2.$$

Az $\omega = iv/R$ helyettesítés után az egyenlet egyszerűsíthető v^2-tel. Ez nagyon fontos tény, mert ez mutatja, hagy létezik egy, a sebességtől független m_{red} érték. Esetünkben:

$$m_{\text{red}} = M + \frac{m}{2}\left(\frac{ri}{R}\right)^2 = 140\text{ g} + 8820\text{ g} = 8960\text{ g} \simeq 9\text{ kg}.$$

A modellt úgy képzeljük el, mint egy játékautót, melyet a 9 kg-os tömeg biztosítására tömör vasból készítünk szabadonfutó kerekekkel. A két autót álló helyzetből indítva, ugyanazon külső erő hatására mozgásuk pillanatról pillanatra megegyezik, az a külső szemlélő, aki nem lát be az autókba, meg sem tudja különböztetni őket. (Az előzőekből ugyan csak az következik, hogy a játékautó és a modell sebesség-út jelleggörbéje megegyezik. Általános törvény azonban a következő: Ha két mozgásnál az út-idő, sebesség-idő, sebesség-út, gyorsulás-idő, gyorsulás-út, gyorsulás-sebesség stb.

jelleggörbék közül az egyik megegyezik, és egy időpillanatban a mozgásoknak ugyanazok az értékei vannak, akkor a két mozgás többi jelleggörbéje is egyezik.)

A feladatban szereplő első kérdésre így is válaszolhatunk: Az a gyorsulás, ami $P = 1$ kp erő hatására létrejön (ugyanaz, mint ami a modellen létrejön), tehát $a = P/m_{\mathrm{red}} = 9{,}81$ newton/9 kg $\simeq 1{,}1$ m/sec^2.

A redukált tömeggel rendelkező autó azonban *mégsem helyettesíti minden tekintetben* a másikat. Azonnal kiderül ez, ha az autókat lejtőre helyezzük, ahol a súlyerő mozgatja őket; vagy mérlegre helyezzük. Megállapítható, hogy a Föld vonzóereje, a gravitációs erő nem a redukált tömegre, hanem a valódi tömegre hat. A lejtőn a lendkerekes autót a valódi súlyának súlyereje mozgatja, sokkal kisebb külső erő hat rá, mint a modell autóra, ezért sokkal kisebb lesz a gyorsulása. Viszont ugyanezen oknál fogva, vízszintes síkon a súrlódás okozta lassulása lesz sokkal kisebb. Ennek a szellemes játékszernek éppen az a lényege, hogy meglökve, kis kezdeti sebessége ellenére, sokkal messzebb gurul, mint hasonló méretű közönséges játékoknál megszoktuk. (Ennek ára a meglökéshez szükséges sokkal nagyobb erőben, ill. munkában van. A mozgási energia legnagyobb része a láthatatlan lendkerékben tárolódik)

A lendkerekes autó példáját általánosítva megállapíthatjuk: Egy jármű mozgását egyszerűen tudjuk számítani a redukált tömege segítségével. A redukált tömeget úgy kapjuk, hogy a jármű haladó és forgó mozgást végző elemeinek mozgási energiáját összegezzük, és ez adja a redukált tömeggel elképzelt modell mozgási energiáját. Pl. egy gyorsvonatnál a kerekek forgó mozgásából számítható energia kb. 4 %-a a haladó mozgás mozgási energiájának: tehát redukált tömege kb. 4 %-kal nagyobb a valódi tömegénél.

Ez a módszer több tömegből összetett rendszerek esetén minden olyan esetben jól alkalmazható, ahol a testek között kényszerkapcsolat van (a legtöbb gép ilyen), tehát ahol az egyik test sebessége megszabja a másik test sebességét.

Fáy Árpád