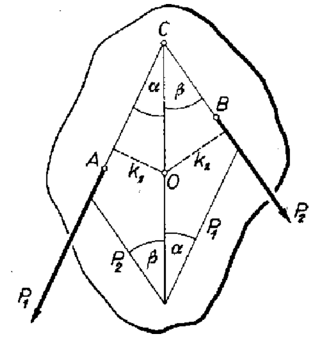
I. Az egyensúly feltétele

Szabadon mozgó test csak akkor lehet egyensúlyban, ha a rá ható erők eredője zérus. Pl., ha a testre két egyenlő nagyságú ellentétes irányú erő hat, és az erők hatásvonalai is egy egyenesbe esnek.

Más a helyzet, ha a test nem teljesen szabad, hanem csupán tengely körül végezhet forgó mozgást. Tapasztalatból is tudjuk, de kísérletileg is igazolható, hogy ekkor a test olyan esetben is nyugalomban maradhat, ha mi egyidejűleg olyan erőket fejtünk ki, melyek eredője nem zérus (az erők hatásvonalai nem esnek egy egyenesbe). Ha a test csupán tengely körül végezhet forgó mozgást (tengellyel rögzített merev test), akkor a test egyensúlyához elegendő az, ha a testre kifejtett erők eredőjének hatásvonala átmegy a tengelyen (a tengelyponton).



1. ábra

Ez esetben ugyanis a tengely által a testre kifejtett reakcióerő egyensúlyozza a testre kifejtett erők eredőjét. (Feltéve természetesen, hogy a tengely ill. a csapágyazás elég szilárd ehhez.) Szerkesszük meg a merev testre A ill. B pontban támadó P_1 ill. P_2 erők eredőjét. (Az erők támadáspontjait hatásvonaluk mentén a közös C pontba tolhatjuk el, az erőkkel szerkesztett paralelogramma átlója adja az eredőt. Ha a P_1 ill. P_2 iránya az eredővel α ill. β szöget zár be, akkor a sinus tétel szerint

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}.$$

Ha az eredő átmegy az O-val jelölt tengelyponton, akkor az α ill. β szögek sinusait másképp is kifejezhetjük. Az O pontból bocsássunk merőlegeseket a P_1 ill. P_2 hatásvonalára. Legyenek ezek k_1 és k_2. A keletkező derékszögű háromszögekből

$$\sin\alpha = \frac{k_1}{OC} \qquad \sin\beta = \frac{k_2}{OC},$$

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{k_2}{OC} : \frac{k_1}{OC} = \frac{k_2}{k_1}.$$

Ezt beírva az előző összefüggés jobb oldalába, a

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{k_2}{k_1}$$

összefüggést kapjuk. Ezt szorzat alakjában írva

$$P_1 k_1 = P_2 k_2.$$

Csak ha ez a feltétel teljesül, akkor megy át a P_1 és P_2 erők eredőjének hatásvonala az O tengelyponton. Ez esetben a tengellyel rögzített merev test a P_1 ill. P_2 erők hatására nyugalomban marad.

A P_1k_1 ill. P_2k_2 szorzatot a P_1 ill. P_2 erőnek az O-n átmenő tengelyre vonatkozó forgatónyomatékának nevezzük.

A forgatónyomatékot egy betűvel (pl. F) jelölhetjük, ekkor az egyensúly feltétele így írható:

$$F_1 = F_2.$$

Tengellyel rögzített merev test két erő hatására akkor van egyensúlyban, ha az erőknek a tengelyre vonatkozó forgatónyomatékai ellentetten egyenlők.

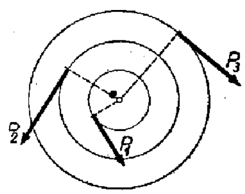
Még egyszer hangsúlyozzuk, hogy egyensúly esetén a merev testre ható erők eredőjét a tengely (a tengely által kifejtett reakcióerő) egyensúlyozza ki. A tengelyt tehát tetemes erő terheli. Kivéve azt az esetet, mikor a testre ható erők eredője éppen zérus (pl. erőpár).

A tengellyel rögzített merev testre ható erő a testet a tengely körül jobbra vagy balra forgatja. Az erő forgató nyomatékát ettől függően – megállapodás szerint – pozitív vagy negatív előjellel láthatjuk el. (Ha a jobbra forgató erő forgatónyomatékát pozitívnak vesszük, akkor a balra forgató erő forgatónyomatéka negatív vagy fordítva.) Ez esetben az egyensúly feltételét úgy is kifejezhetjük, hogy a tengellyel rögzített merev test akkor van egyensúlyban, ha a rá ható erők forgató nyomatékainak algebrai (előjellel vett) összege zérus. Ez nemcsak két, hanem tetszőleges számú erő esetére is általánosítható.

Ha a merev test csak tengely körül végezhet forgó mozgást, akkor az egyensúly feltétele

$$F_1 + F_2 + F_3 + \ldots + F_n = 0,$$

ahol $F_1,\ F_2\ \ldots$ a testre ható erők előjellel vett forgató nyomatékát jelentik.



2. ábra

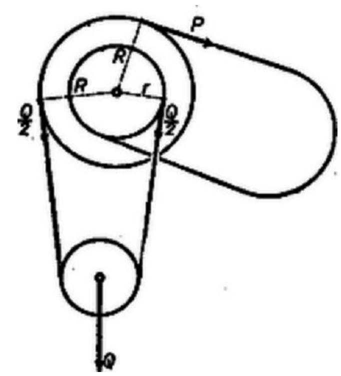
1. Egy korong középpontján átmenő tengely körül foroghat. A korongra 1 cm, 2 cm, 3 cm sugarú köröket rajzoltunk. A körök kerületi pontjaiban (érintő irányú) $P_1 = 3$ kp, $P_2 = 4{,}5$ kp, $P_3 = 4$ kp erő hat. *Egyensúlyban van-e a korong?* (2. ábra.)

$$\begin{array}{lll} \text{A } P_1 \text{ erő forgatónyomatéka} & F_1 = -3 \quad \text{kp} \cdot 1 \text{ cm} = -\ 3 \text{ kp cm}, \\ \quad P_2 \ \ ,, \qquad\qquad ,, & F_2 = -4{,}5 \text{ kp} \cdot 2 \text{ cm} = -\ 9 \text{ kp cm}, \\ \quad P_3 \ \ ,, \qquad\qquad ,, & F_3 = \quad 4 \quad \text{kp} \cdot 3 \text{ cm} = \quad 12 \text{ kp cm}. \end{array}$$

$$F_1 + F_2 + F_3 = -3 \text{ kp cm} - 9 \text{ kp cm} + 12 \text{ kp cm} = 0.$$

A korong egyensúlyban van. Szerkesztéssel mutassuk ki, hogy az erők eredője átmegy a tengelyen!

2. Határozzuk meg az ún. *differenciálcsiga* esetében az egyensúly feltételeit. (A differenciálcsiga egybeépített kisebb és nagyobb korongból áll. A mozgócsiga tengelyére akasztott testet a kettős korongon átvezetett kötél ill. lánc segítségével emeljük ill. egyensúlyozzuk. Hogy a kettős csigán a lánc meg ne csúszhasson, a kettős csiga mély vájataiban még fogazásszerű kiemelkedések is vannak.)



3. ábra

A kettős korongra három erő fejt ki forgatónyomatékot:

$$\begin{array}{lll} P & \text{forgatónyomatéka} & F_1 = PR, \\[1ex] \dfrac{Q}{2} & ,, & F_2 = \dfrac{Q}{2} r, \\[2ex] \dfrac{Q}{2} & ,, & F_3 = \dfrac{Q}{2} R. \end{array}$$

Egyensúly van, ha

$$F_1 + F_2 + F_3 = PR + \frac{Q}{2} r = \frac{Q}{2} R = 0.$$

Ebből a teher egyensúlyozásához szükséges P erő meghatározható:

$$P = \frac{Q}{2} \cdot \frac{R - r}{R}.$$

II. Tengely körül forgó merev test energiája (forgási energia)

A merev test forgási energiája egyes tömegpontjainak mozgási energiájából származik ill. tevődik össze.

Minthogy az energia skaláris mennyiség, a forgó test energiáját a tömegpontok mozgási energiáinak egyszerű összeadásával kapjuk.

A forgó test egyes tömegpontjai általában különböző sebességgel mozognak. Ha az m_1 tömegpont sebessége v_1, az m_2-é v_2, és így tovább, akkor az egyes tömegpontok mozgási energiája

$$\frac{m_1 v_1^2}{2}; \quad \frac{m_2 v_2^2}{2}; \quad \frac{m_3 v_3^2}{2} \quad \ldots,$$

a forgó test energiája így

$$E = \frac{1}{2}(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 + m_3 v_3^2 + \ldots).$$

A tömegpontok sebességét kifejezhetjük a forgás szögsebességének segítségével is, ami már a forgómozgásra jellemző állandó. Ha az m_1 tömegpont a tengelytől r_1, az m_2 a tengelytől r_2 stb. távolságra van, akkor

$$v_1 = r_1\omega, \quad v_2 = r_2\omega, \quad v_3 = r_3\omega, \ \ldots,$$

és így az energia

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}(m_1 r_1^2\omega^2 + m_2 r_2^2\omega^2 + m_3 r_3^2\omega^2 + \ldots) \\ &= \frac{1}{2}\omega^2(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \ldots). \end{aligned}$$

A zárójelben szereplő kifejezést egy betűvel (I) jelölve

$$E = \frac{1}{2}I\omega^2.$$

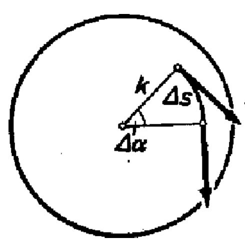
$$\text{Az} \ \ I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \ldots$$

szorzatösszeget – a későbbiekben kifejtjük, hogy miért – a forgó test *tehetetlenségi nyomatékának* nevezzük.

III. A forgó testre ható erő munkája és a forgási energia összefüggése. A forgómozgás dinamikai alapegyenlete

Az energia-megmaradás tétele szerint a forgó test energiája is csak munkavégzés árán növelhető.

Hasson az O ponton átmenő tengely körül forgó testre igen kis Δt ideig P erő. (Az erő hatásvonalának a O-tól való távolsága legyen k.)



4. ábra

Ha eközben a test a tengely körül igen kis $\Delta\alpha$ szöggel elfordul, akkor az erő irányában $\Delta s = k\Delta\alpha$ elmozdulás jön létre.

Az erő tehát

$$\Delta L = P\Delta s = Pk\Delta\alpha = F\Delta\alpha$$

munkát végez. [Az erő támadáspontjának az erő irányába eső elmozdulását rögtön látjuk, ha a támadáspontot az erő hatásvonalának a O-hoz legközelebb eső A pontjába toljuk el.]

E munkavégzés árán a forgási energia kevéssel (ΔE-vel) növekszik. Minthogy a forgási energia kifejezésében szereplő I tényező az elfordulás közben nyilván nem változik, az energia csak úgy változhat, hogy a forgó test szögsebessége (ω) változik. Legyen a szögsebesség megnövekedés $\Delta\omega$. Minthogy feltevésünk szerint az egész jelenség igen rövid (Δt) ideig tart, a $\Delta\omega$ is igen kicsi hányadrésze az ω-nak. A megnövekedett forgási energia:

$$E_1 = \frac{1}{2}I(\omega + \Delta\omega)^2.$$

Az energia megnövekedése pedig

$$\begin{aligned} \Delta E = E_1 - E &= \frac{1}{2}I(\omega + \Delta\omega)^2 - \frac{1}{2}I\omega^2 = \\ &= \frac{1}{2}I\left[2\omega\Delta\omega + (\Delta\omega)^2\right]. \end{aligned}$$

De ha $\Delta\omega$ az ω-hoz képest igen kicsi, akkor $(\Delta\omega)^2$ még az $\omega\Delta\omega$-hoz képest is elhanyagolhatóan kicsi. [Pl. ha $\Delta\omega$ ezredrésze az ω-nak, akkor $(\Delta\omega)^2$ már a milliomodrésze.]

Így

$$\Delta E \sim \frac{1}{2} I 2\omega\Delta\omega = I\omega\Delta\omega.$$

Az energiatétel szerint a forgási energia megnövekedése egyenlő a végzett munkával:

$$\Delta E = F\Delta\alpha.$$

Kiszámíthatjuk az energiának időegységre eső megváltozását is:

$$\frac{I\omega\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{F\Delta\alpha}{\Delta t},$$

vagy

$$I\omega\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = F\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}.$$

$\frac{\Delta a}{\Delta t}$ éppen a szögsebesség, $\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ pedig a szögsebesség időegységre eső megváltozása, vagyis a szöggyorsulás. Jelöljük a szöggyorsulást β-val, akkor

$$I\omega\beta = F\omega,$$

így

$$I\beta = F, \quad \text{vagy} \quad \beta = \frac{F}{I}.$$

Ez a két kifejezés pontosan ugyanolyan szerkezetű, mint a haladó mozgásra megállapított

$$ma = P \quad \text{ill.} \quad a = \frac{P}{m}$$

összefüggés. Ezen összefüggések dinamikai tartalma az, hogy gyorsulást csak erő hoz létre (ha $P = 0$, $ma = 0$ azaz $a = 0$). Állandó erő ugyanazon testen állandó gyorsulást hoz létre. A létrehozott gyorsulás arányos az erővel. Adott gyorsulás létrehozásához annál nagyobb erőre van szükség, minél nagyobb a test tömege. Ez az arányosság azt fejezi ki, hogy haladó mozgás viszonylatában a tömeg a tehetetlenség mértéke.

Forgómozgásra kapott egyenleteink viszont azt mondják, hogy szöggyorsulást csak forgatónyomaték hoz létre. Ha a forgatónyomaték zérus, a szögsebesség állandó. A szöggyorsulás arányos a forgatónyomatékkal. Meghatározott szöggyorsulás létrehozásához annál nagyobb forgatónyomaték szükséges, minél nagyobb az adott test esetében az

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots + m_n r_n^2$$

szorzatösszeg. Forgás esetében a tehetetlenség mértéke nem egyszerűen a tömeg, hanem az I tehetetlenségi nyomaték. Ezt érzékelteti a *tehetetlenség nyomaték* elnevezés.

A munka és a forgási energia összefüggése gyakorlati szempontból is nagy jelentőségű. Megfelelő tömegeloszlással nagymértékben megnövelhető a tehetetlenségi nyomaték, azért munkavégzés árán forgó testben nagy forgási energiát lehet kis helyen felhalmozni. Az így felhalmozott forgási energia azután munkavégzésre felhasználható. Erre szolgál motoroknál a lendkerék, melynek a dugattyú munkaüteme alatt felhalmozott forgási energiája szolgáltatja a gázkeverék komprimálásához szükséges munkát.

Érdekes példa a lendkerekes játékautó. Előzőleg nagy fordulatszámra felgyorsított lendkerék forgási energiájával hajtott autóbuszoknak közúti forgalomba állítására is történtek már próbálkozások.

Párkányi László