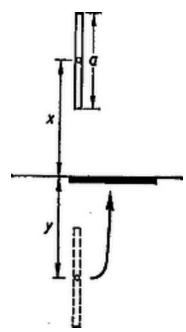
Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat szeptember 30-án rendezte ez évi Eötvös fizikai versenyét Budapesten és 6 vidéki városban az idén érettségizettek számára. A versenyzők 5 óráig dolgozhattak, és bármilyen segédeszközt használhattak. Az alábbiakban ismertetjük a verseny feladatait és azok megoldását:

1. 1 méter *hosszú,* 0,25 grs/cm^3 *fajsúlyú vékony fapálcát víz felszíne felett függőlegesen lógatunk úgy, hogy alsó vége* 2 méter *magasan van a víz felett. A pálcát elengedjük. Vízbe esve milyen mélyre esik le a pálca a vízben? Minden súrlódás és közegellenállás elhanyagolandó. Mi történik, ha a pálcát* 0,5 méter *magasról ejtjük le. Mi történik, ha a pálcát a víz alól indítjuk el úgy, hogy felső vége indításkor* 10 cm-*re van a víz szintje alatt? Mi történik, ha ugyanezt* 0,75 grs/cm^3 *fajsúlyú pálcával tesszük meg?*

Megoldás: Ha mozgástanilag vizsgáljuk a jelenséget, akkor megállapítjuk, hogy a pálca először esést végez, amelynek végsebessége számítható. A vízbe érve az úszási helyzettől számított távolsággal egyenesen arányos erő hat rá mint a súly és felhajtóerő különbsége; ekkor nem nulla kezdősebességgel induló rezgő mozgás folyik le, végül, ha már a felső vége is elmerült, egyenletesen lassuló mozgás csatlakozik a rezgéshez. De egyszerűbb a megoldás az energiamegmaradás törvényével, annak alapján, hogy a megszerzett mozgási energia a felhajtóerő ellen végzett munkával egyenlő. Az itt közölt megoldás hasonló módszert alkalmaz.

Jelöljük a pálca hosszát a-val, keresztmetszetének területét F-fel, sűrűségét d-vel. A folyadék sűrűsége d_0. A pálca közepének, súlypontjának magassága induláskor a víz felett x, legmélyebb helyzetében, a víz alatt y. (1. ábra.) x-et felfelé számítjuk pozitívnak, y-t pedig lefelé.



1. ábra

Az 1. ábrán látható esetben úgy fogjuk fel a jelenséget, hogy a pálca tömege $x+y$ úton leesve munkát végzett, amelynek árán a pálca helyén levő víz feljutott a felszínre. A pálca tömege Fad, útja $x+y$, tehát a pálca leesésekor végzett munka $Fad(x+y)g$. A pálca helyéről Fa térfogatú, Fad_0 tömegű víz jutott fel a felszínre, y utat megtéve, tehát ez a munkavégzés Fad_0yg. A

két munkavégzés egyenlő:

$$Fad(x+y)g = Fad_0yg.$$

Innen a lemerülés legnagyobb mélysége:

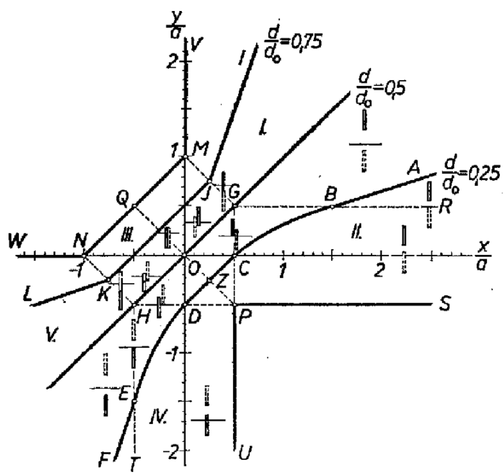
$$y = x \cdot \frac{d}{d_0 - d}.$$

Mivel az edény felszíne igen nagy, a pálca bemerülésekor a szintmagasság nem változik észrevehetően, és a pálca helyéről felmenő víz súlypontjának útja valóban y.

A jobb áttekintés céljából igen jó, ha x, y helyett x/a és y/a változókat használjuk, amelyek a súlypont-magasságokat a pálcahossz hányadában fejezik ki. Így változóink tiszta számok, és megállapításaink bármilyen méretű pálcára vonatkoznak. Úgyszintén d/d_0 sűrűséghányaddal számolunk tovább, mert a feladat szempontjából csak ez számít. Előbbi eredményünket átalakítva ezt kapjuk:

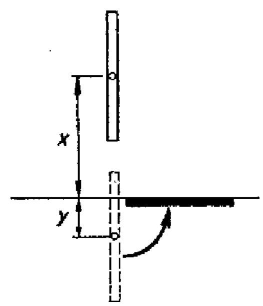
$$\text{(I.)} \qquad \frac{y}{a} = \frac{x}{a} \cdot \frac{\frac{d}{d_0}}{1 - \frac{d}{d_0}}.$$

y/a-nak x/a-tól való függését koordinátarendszerben ábrázoljuk (2. ábra). Az I. alatti eredmény az origón átmenő egyenest jelent, ábránk $d/d_0 = 0{,}25$ esetben mutatja ezt az egyenest (AB egyenes), iránytangense feladatunk első kérdése esetében 1/3. Feladatunk első kérdésében $x/a = 2{,}5$ és $y/a = 5/6$.



2. ábra

Feladatunk érdekességei csak most kezdődnek. Téves volna azt hinni, hogy most már csak helyettesíteni kell az I. szerinti eredménybe. Ez a képlet érvénytelenné válik attól kezdve, hogy a pálca alsó helyzetében kiáll a vízből, vagyis, ha y/a kisebb 0,5-nél. Ekkor új levezetést kell végeznünk. (3. ábra.)



3. ábra

A pálca tömege most is $x+y$ úton esik le, tehát a leeső pálca munkavégzése most is $Fad(x+y)g$, de a pálca helyéről feljutó víz tömege csak $F(\frac{a}{2}+y)d_0$, és ezen víztömeg súlypontja $\left(\frac{a}{2}+y\right):2$ mélységről jut fel, így munkavégzése

$$F\left(\frac{a}{2}+y\right)d_0\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}+y\right)\cdot g,$$

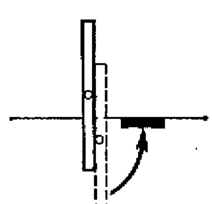
és a munkavégzéseket egyenlővé téve, a most érvényes egyenletünk:

$$Fad(x+y)g=F\left(\frac{a}{2}+y\right)d\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a}{2}+y\right)\cdot g.$$

Ennek megoldása:

(II.) $$\frac{y}{a}=\frac{1}{2}\cdot\left[-\left(1-2\cdot\frac{d}{d_0}\right)+\sqrt{\left(1-2\cdot\frac{d}{d_0}\right)^2+\left(8\cdot\frac{d}{d_0}\cdot\frac{x}{a}-1\right)}\right].$$

Ez négyzetes összefüggés, ábrázolása koordinátarendszerünkben fekvő paraboladarabot ad (B-től C-ig). E képlet érvényességi területére kerül a feladat második kérdése: $x/a=1$-nél $y/a=0{,}3$. A BC görbedarab továbbra is $d/d_0=0{,}25$ mellett érvényes.



4. ábra

II. számú képletünk érvényességi területe hamar megszűnik, amint a leeső pálca úgy indul, hogy alsó vége már induláskor is belóg a vízbe (4. ábra). A leeső pálca munkavégzését most is az előbbi kifejezés adja meg, de most $F(x+y)d_0$ tömegű víz $\left(\frac{a}{2}-x+\frac{a}{2}+y\right):2$ mélységből emelkedik fel:

$$Fad(x+y)g = F(x+y)\cdot d_0\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a}{2}-x+\frac{a}{2}+y\right)\cdot g.$$

(Ne felejtsük el, hogy a víz szintjétől felfelé irányuló y negatív számként kerül az egyenletbe.) A megoldás:

$$\text{(III.)}\qquad \frac{y}{a}=\frac{x}{a}+2\cdot\frac{d}{d_0}-1.$$

E függvény grafikus ábrázolása 45°-os egyenes (ábránkban $d/d_0=0{,}25$ esetében C-től D-ig).

A még hátralevő két eset a legelsők inverze. A jelenség szimmetriájából is következik, hogy a kezdeti és végső pálcahelyzet felcserélhető. $x/a=0$-tól $x/a=-0{,}5$-ig érvényes képletünk:

$$\text{(IV.)}\qquad \frac{y}{a}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{d_0}{d}\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{d_0}{d}-1\right)\cdot\frac{x}{a}-\frac{1}{8}\cdot\frac{d_0}{d}.$$

Ez egy álló parabola darabja D-től E-ig. Végül $x/a=-0{,}5$-től még negatívabb területek felé haladva, (E-től F irányában) az összefüggést újra az origó felé mutató egyenes tünteti fel

$$\text{(V.)}\qquad \frac{y}{a}=\left(\frac{d_0}{d}-1\right)\cdot\frac{x}{a}.$$

Ide tartozik feladatunk harmadik kérdése: ha $x/a=-0{,}6$, akkor $y/a=-1,8$.

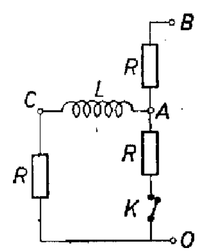
Az úszás esetében $x/a=-y/a$, ennél kisebb x/a esetében a pálca kiugrik a vízből. Görbénknek ez a pont a szimmetriapontja (Z).

Az összefüggés képe mindaddig ilyen, amíg d/d_0 kisebb, mint 0,5. Ha d/d_0 értéke 0,5, akkor az összefüggést az origón átmenő 45°-os egyenes tünteti fel. Az I., III. és V. összefüggések egyaránt ezt adják. Ilyen sűrűségarány mellett a pálca pontosan olyan mélyre megy le a víz alá, amilyen magasról indult és fordítva.

Ha a sűrűségarány 0,5 és 1 között van, szintén csak az I., III. és V. összefüggések szerepelnek, a II. és IV. alatti összefüggésekre nem kerül sor. Ilyenkor, ha azt akarjuk, hogy a pálca leejtés utáni legmélyebb helyzetében felül kiálljon a vízből, akkor úgy kell elindítani, hogy alsó vége induláskor beleérjen a vízbe. Az összefüggést $d/d_0=0{,}75$ esetében a 2. ábra $IJKL$ vonala tünteti fel. A feladat értelmét veszti onnantól kezdve, hogy d/d_0 1-gyel egyenlő ($VMNW$ vonaldarabtól balra felfelé).

A feladatban 0,75-ös sűrűségre vonatkozó kérdésekre a válaszok: ha $x/a=2{,}5$, akkor $y/a=7{,}5$; ha $x/a=1$, akkor $y/a=3$; ha $x/a=-0{,}6$, akkor $y/a=-0{,}1$.

Vizsgáljuk meg képleteink érvényességi területeit a grafikus ábrán. Az I. képlet a $VMGR$ vonaltól jobbra felfelé, az V. képlet a $WNHT$ vonaltól balra lefelé érvényes. A II. képlet az $RGPS$ téglalapban, a IV. képlet a $THPU$ téglalapban érvényes. Végül a III. képlet használandó a $GMNHP$ ötszögben. Az SPU-tól jobbra lefelé fekvő terület megvalósíthatatlan. A területek határvonalán mindkét érdekelt képlet ugyanazt adja. Az úszási, vagyis egyensúlyi esetek a $QOZP$ egyenes mentén sorakoznak.



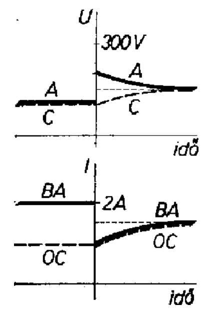
5. ábra

2. *A rajz szerinti kapcsolásban a föld és B pont közé hosszabb idő óta* 300 volt *állandó feszültségkülönbség van kapcsolva. R ellenállások mindegyike* 100 ohm*-os és L tekercs önindukciója* 10 henry*. K pontban a vezetéket hirtelen megszakítjuk. Kérdés: mennyivel ugrik A pont feszültsége közvetlenül a megszakítás után (például néhány ezred másodpercen belül)?*

(Károlyházy Frigyes)

Megoldás: Az 5. ábra mutatja az elrendezést. L önindukciós tekercsnek nincs ohmos ellenállása. Ohm törvénye szerint az eredeti állapotban a felső ellenálláson, B és A között 2 amperes áram, az alsó ellenállások mindegyikén CO között és AO között 1–1 amper folyik és A, valamint C pont feszültsége 100 volt. A hirtelen kikapcsoláskor L

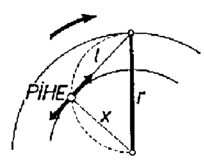
önindukciós tekercs árama egy kis darabig nem képes megváltozni, továbbra is 1 amper marad, és ekkora kell, hogy legyen a felső, B és A közötti ellenállás árama is. Tehát a megszakítás után a $BACO$ úton végig 1 amper folyik. A szakított ág ellenállásában azonnal megszűnik az áram, és a felső, B és A közötti ellenállásban azonnal 1 amperessé lesz az áramerősség, hiszen tisztán ohmos ellenállásban az áramnak nincs tehetetlenségi sajátsága. Az 1 amperes áram a CO közötti 100 ohmon változatlanul 100 voltos feszültségeséssel jár együtt, de a BA közötti 100 ohmon is 100 volt feszültségesés jön létre. Mivel B változatlanul 300 volton van, e pillanatban A pontban $300 - 100 = 200$ volt jön létre. Tehát a válasz: A pont feszültsége 100 voltot ugrik. E pillanatban L önindukciós tekercsen C és A között 100 voltos feszültségkülönbség van, pedig a tekercs tökéletesen vezető fémből készült, és nincs ellenállása. Éppen ezért hirtelen növekedni kezd benne az áramerősség, olyan hirtelen, amint az az önindukciós feszültség $V = L\dfrac{di}{dt}$ törvényből következik. Az idők folyamán kialakuló végső állapotban az áramerősség mindegyik ellenállásban 1,5 amper, és A, valamint C pont feszültsége 150 volt. A feszültségek és áramerősségek időbeli kialakulását mutatja a 6. ábra.



6. ábra

3. *Ostornyél egyik végére vékony cérnaszálon elenyésző tömegű tollpihét kötünk, és körbe forgatjuk. Milyen pályán mozog a pihe?*

(Károlyházy Frigyes)



7. ábra

Megoldás: A pihére jellemző, hogy csak közegellenállása van, de nincs sem tömege, sem súlya, sem tehetetlenségi ereje. Ezért mindegy, hogy mely síkban mozog. Mozgás közben a cérna húzóerejének kell egyensúlyt tartania a pihére ható közegellenállási erővel. Időben állandó állapotban a pihe is körön mozog. Mivel a közegellenállás erő a pihe pillanatnyi elmozdulási irányával ellentétesen működik, ezért a pihe pályakörének lesz érintője a cérna iránya. (7. ábra.) A cérna másik, bothoz kötött vége nagyobb rádiuszú kört ír le. Ha tehát adva van a botvég által leírt kör rádiusza (r), akkor az erre rajzolt félkört a cérnahosszal (l) elmetszve kapjuk a pihe körének rádiuszát (x). Számítással: $x = \sqrt{r^2 - l^2}$. Ha a cérnaszál hosszabb, mint a botvég körének rádiusza, akkor nincs ezen feltétel szerinti stabilis pálya.

A VERSENY EREDMÉNYE: I. díjat nyert *Zakariás László* (a budapesti Piarista Gimnáziumban Kovács Mihály tanítványa), II. díjat nyert *Fritz József* (a mosonmagyaróvári Kossuth-gimnáziumban Németh Béláné tanítványa). Dicséretet nyertek *Bollobás Béla* (a budapesti Apáczai Csere János gimnáziumban Csernák Emil tanítványa), *Molnár Emil* (a győri Révai-gimnáziumban Bőnyi Mihály tanítványa), *Perjés Zoltán* (a budapesti Piarista Gimnáziumban Kovács Mihály tanítványa) és *Sólyom István* (a budapesti Vörösmarty-gimnáziumban Óhegyi Ernő tanítványa).