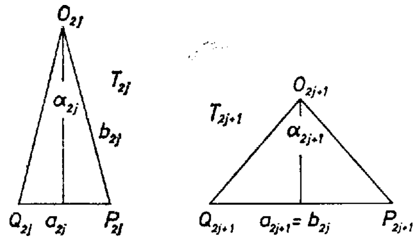
I. megoldás: 1. Célszerűbb a háromszögek közös kerületének inkább az $1/3$ részét jelölni egy betűvel, legyen ez p, így a kerület $3p$ és ha T_i alapja a_i, akkor szára, egyben T_{i+1} alapja (1. ábra)



1. ábra

$$b_i = a_{i+1} = \frac{3p - a_i}{2} = \frac{3p}{2} - \frac{a_i}{2}. \tag{1}$$

Legyen még $a_0 = p - d$, így $b_0 = a_1 = p + d/2$ és $b_0 > a_0$ miatt $d > 0$, másrészt azonban $d < p$. Továbbmenve $a_2 = p - d/4$, és az ezekből adódó

$$a_i = p - \left(-\frac{1}{2}\right)^i d$$

sejtést igazolja, hogy vele (1) alapján

$$a_{i+1} = p - \left(-\frac{1}{2}\right)^{i+1} d.$$

A szárak közti α_i, szögre, a $(-1/2) = q$ rövidítést bevezetve, $i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ esetén

$$\sin\frac{\alpha_i}{2} = \frac{a_i}{2b_i} = \frac{a_i}{2a_{i+1}} = \frac{p - q^i d}{2p + q^i d} = \frac{1}{2} - \frac{3q^i d}{2(2p + q^i d)}. \tag{2}$$

Tekintsük ennek megváltozását, ha az indexet 2-vel növeljük:

$$\sin\frac{\alpha_{i+2}}{2} - \sin\frac{\alpha_i}{2} = \frac{3q^i d}{2(2p + q^i d)} - \frac{3q^{i+2} d}{2(2p + q^{i+2} d)} = \frac{3q^i d}{2}\left(\frac{1}{2p + q^i d} - \frac{1}{8p + q^i d}\right),$$

a zárójelbeli tényező pozitív, így $q < 0$ miatt páros i esetén a különbség pozitív, páratlan i esetén negatív, tehát a félszögek sinusából képezett sorozat páros indexű részsorozata növekvő, páratlan indexű részsorozata csökkenő. Ennek alapján az állítás helyessége abból adódik, hogy minden i-re $0 < \alpha_i/2 < \pi/2$ és ebben az intervallumban $\sin x$ – tehát inverze is – monoton növekvő.

2. A számpéldában olyan i értéket keresünk, amelyre $59° < \alpha_i < 61°$, más szóval $\sin 29°30' < \sin\alpha_i/2 < \sin 30°30'$, a táblázatból vett adatok kerekített voltára tekintettel az intervallumot szűkítve:

$$0{,}4925 \le \sin\alpha_i/2 \le 0{,}5074. \tag{3}$$

Keressünk pl. páros i értéket, legyen $i = 2j$. Így, (2)-t felhasználva (3) helyére egyetlen egyenlőtlenséget írhatunk

$$0{,}4925 \le \frac{1}{2} - \frac{3q^{2j} d}{2(2p + q^{2j} d)}, \tag{4}$$

hiszen a másik egyenlőtlenség teljesül, mert minden páros indexre $\sin\alpha_{2j}/2 < 1/2 = 0{,}5$. Tovább alakítva (4)-et:

$$\frac{3q^{2j} d}{2(2p + q^{2j} d)} < \frac{3q^{2j} d}{4p} \le 0{,}0075,$$
$$q^{2j} = \frac{1}{4^j} \le \frac{0{,}03p}{3d} = \frac{0{,}01 \cdot 3p}{3d} = \frac{1}{94},$$

ugyanis $a_0 = 2$, $b_0 = 49$ alapján $3p = 100$ és $3d = 3p - 3a_0 = 94$. Végül a megoldás:

$$4^j \ge 94,\ j \ge 4,\ i \ge 8,\ \text{páros.}$$

Hasonlóan (3) jobb oldali egyenlőtlensége alapján megfelel minden $i \ge 7$, páratlan index.

(2) alapján $i = 8$ esetén $\sin\alpha_8/2 = 4251/8559 < 0{,}4967$, $\alpha_8 < 59°40'$, ez tehát a $10'$-es megközelítés fölemelt követelményének már nem felel meg. A fentiekhez hasonlóan, de most páratlan $i(= 2j + 1)$ értéket keresve,

$$\sin\frac{\alpha_i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3q^{2j+1} d}{2(2p + q^{2j+1} d)} < 0{,}5012 < \sin 30°5',$$

(ugyanis $q^{2j+1} < 0$, és ezért $\sin\alpha_{2j+1} > 0{,}5 > \sin 29°55'$; az interpolált értéket lefelé kerekítettük),

$$\frac{3q^{2j}d}{4(2p+q^{2j+1}d)} < \frac{3q^{2j}d}{4(2p-d)} < 0{,}0012$$

(ugyanis másrészt $q^{2j+1} > -1$ és $d < p$), végül

$$\frac{1}{q^{2j}} = 4^j > \frac{3d}{4(2p-d)0{,}0012} \approx 555$$

(felkerekítve), amiből $j \geq 5$, tehát megfelel minden $i = 2j+1 \geq 11$ érték.

Hennyey Katalin (Budapest, Kölcsey F. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzés. Hasonlóan tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz meghatározható olyan n, hogy minden $i > n$ mellett $|\alpha_i - 60°| < \varepsilon$, mondhatjuk tehát, hogy a T_n háromszögek szögei 60°-hoz tartanak.

II. megoldás a feladat első részére. Legyen tovább is T_i alapja a_i, szára b_i, így folytatólag

$$b_i = a_{i+1} = s - \frac{a_i}{2}, \qquad a_{i+2} = s - \frac{a_{i+1}}{2} = \frac{s}{2} + \frac{a_i}{4}.$$

Ha mármost $a_i \leq b_i$, akkor $a_i \leq 2s/3$ és $a_{i+2} - a_i = 0$ és persze $b_{i+2} - b_i = (a_i - a_{i+2})/2 < 0$; ha pedig $a_i > b_i$, akkor hasonlóan $a_{i+2} - a_i < 0$ és $b_{i+2} - b_i > 0$. Az első eset (a III. tulajdonság alapján) a páros indexekre következik be, az egyenlőség kizárásával, a második pedig a páratlanokra.

Ezek szerint páros indexekre

$$\sin\frac{\alpha_{2j+2}}{2} = \frac{a_{2j+2}}{2b_{2j+2}} > \frac{a_{2j}}{2b_{2j+2}} > \frac{a_{2j}}{2b_{2j}} = \sin\frac{\alpha_{2j}}{2},$$

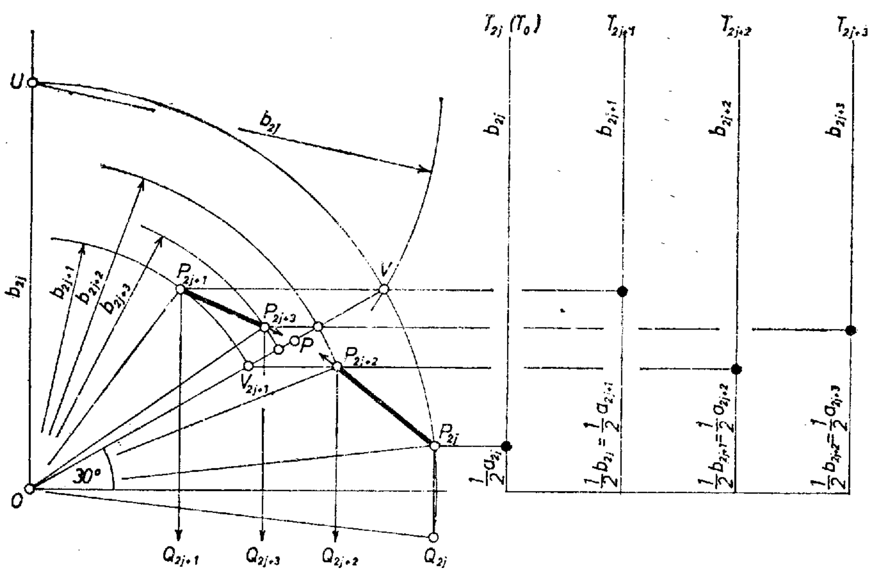
és így $\alpha_{2j+2} > \alpha_{2j}$, páratlan indexekre pedig

$$\frac{\sin\alpha_{2j+1}}{2} = \frac{a_{2j+1}}{2b_{2j+1}} < \frac{a_{2j-1}}{2b_{2j+1}} < \frac{a_{2j+1}}{2b_{2j-1}} = \sin\frac{\alpha_{2j-1}}{2},$$

ezért $\alpha_{2j+1} < \alpha_{2j-1}$.

Sashegyi László (Tatabánya, Árpád Gimn., III. o. t.)

Megjegyzés. A 2. ábrán a háromszög-sorozat 4 egymás utáni $T_i = OP_iQ_i$ háromszögét közös főcsúccsal és szimmetriatengellyel szerkesztettük T_{2j}-ből kiindulva (ami persze T_0 is lehet).



2. ábra

A kerület felének, s-nek kettéosztását $a/2$-re és b-re újabb és újabb s-szakaszon végeztük, ezeket a tengelyre merőlegesen és kezdőpontjukkal a tengelyen vettük fel.

A b_{2j} szár felét – mint $a_{2j+1}/2$ hosszát – az OUV szabályos háromszög OU-ra merőleges magasságegyenesével metszettük le s aljáról, a fönt maradó b_{2j+1} résszel pedig a magasságegyenesből kimetszettük P_{2j+1} helyzetét, O körül körívet írva.

E körív OV-vel való V_{2j+1} metszéspontjának a szimmetriatengelytől való távolsága mindjárt $b_{2j+1}/2$, hiszen OV hajlása e tengelyhez 30°.

A P_i pontok sorozata tart az OV szárnak ahhoz a P pontjához, amelyre $OP = 2s/3$.