I. megoldás. I. Az első állítást a teljes indukció módszerével bizonyítjuk, az (1) bal oldalán álló kifejezést s_n-nel jelöljük. $n=1$ esetén $s_1=1/2+1/3+1/4=13/12>1$, az állítás igaz. Ha mármost k olyan természetes szám, amelyre $s_k-1>0$, akkor $k+1$ esetében

$$\begin{aligned}s_{k+1}-1&=(s_k-1)-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3(k+1)}+\frac{1}{3k+4}=\\&=(s_k-1)+\frac{1}{3k+2}-\frac{2}{3(k+1)}+\frac{1}{3k+4}=\\&=(s_k-1)+\left(\frac{1}{3k+2}-\frac{1}{3k+3}\right)-\left(\frac{1}{3k+3}-\frac{1}{3k+4}\right)=\\&=(s_k-1)+\frac{1}{(3k+2)(3k+3)}-\frac{1}{(3k+3)(3k+4)}=\\&=(s_k-1)+\frac{1}{3k+3}\left(\frac{1}{3k+2}-\frac{1}{3k+4}\right)>s_k-1>0,\end{aligned}$$

mert az elhagyott tag pozitív, vagyis az állítás igaz volta átöröklődik k-ról $k+1$-re. Ezzel (1)-et igazoltuk.

II. Úgy választjuk meg r-et a

$$H_r=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{r}$$

összegben, hogy H_r egy adott A számnál nagyobb legyen. Ez negatív A esetén $r=1$-re is teljesül. Ha $A\geq 0$, feltehetjük, hogy pozitív egész, mert ha nem az, felkerekítjük a következő pozitív egésszé. Ezután H_r-nek 1 utáni részét $A-1$ olyan részösszegből állítjuk össze, amilyen (1) bal oldalán áll, az elsőben n-et 1-nek választva. Az így fellépő utolsó tört nevezőjét választjuk r-nek. Ezzel a feladat második állítását lényegében már bebizonyítottuk.

Szemléletesebbé tesszük bizonyításunkat, közelebbről meghatározva az A (pozitív egész) számhoz tartozó r-et.

H_r mondott k-adik szeletében (elsőnek az $1=1/1$-et tekintjük) az utolsó tag nevezőjét a_k-val jelölve, ez 1-gyel nagyobb, mint az előző szeletbeli megfelelőjének, a_{k-1}-nek 3-szorosa, ennélfogva a szelet utolsó tagjának nevezője

(2) $$a_1=1,\quad a_k=3a_{k-1}+1\quad (k=2,3,\ldots).$$

Eszerint

$$a_2=3+1=\frac{3^2-1}{3-1}=4,\quad a_3=(3^2+3)+1=\frac{3^3-1}{2}=13,$$

és a látható $a_k=(3^k-1)/2$ szabályszerűséget általában igazolja (2), így az A sorszámú szelet utolsó tagjának nevezője

(3) $$a_A=\frac{3^A-1}{2}=r.$$

Eddig a határig véve a természetes számok reciprokát, összegük nagyobb A-nál.

Természetesen hasonlóan akkor is kijelölhetnénk elegendő számú természetes számot, ha mondjuk csak az 1000-nél nagyobbak közül választhatnánk.

III. Az előírt $A=4{,}5$-et 5-re kerekítve (3) szerint $r=121$. Ha viszont észrevesszük, hogy $A-H_2=3$, egész szám, akkor (1)-et 3-szor alkalmazva a (2) rekurzív képlet alapján $n=2$-re, 7-re és 22-re, ezt írhatjuk:

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{22}\right)+\left(\frac{1}{23}+\ldots+\frac{1}{67}\right)=H_{67}>4,5.$$

Bálint László (Budapest, Móricz Zs. Gimn., II. o. t.)

*

A továbbiakban csak az (1) állításra adunk más bizonyításokat.

II. megoldás. (1) bal oldala elölről és hátulról számított k-adik tagjának összege $(k=1,2,\ldots,n)$

(5) $$\begin{aligned}\frac{1}{n+k}+\frac{1}{3n+2-k}&=\frac{4n+2}{\{2n+1-(n+1-k)\}\cdot\{2n+1+(n+1-k)\}}=\\&=\frac{4n+2}{(2n+1)^2-(n+1-k)^2}>\frac{2(2n+1)}{(2n+1)^2}=\frac{2}{2n+1}.\end{aligned}$$

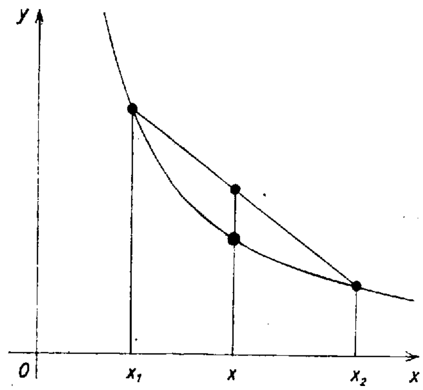
Ilyen pár n van, a középső $1/(2n+1)$-nek nem jut pár. Így pedig

$$s_n>n\cdot\frac{2}{2n+1}+\frac{1}{2n+1}=1,$$

amit bizonyítanunk kellett.

Török István (Esztergom, Hell J. Bányagép. Techn., IV. o. t.)
Molnár József (Baja, III. Béla Gimn., II. o. t.)

Megjegyzések. 1. A meggondolás szemléletes megfelelője a következő: az $y = 1/x$ görbének az $x > 0$ tartomány fölötti íve (alulról, vagyis a pozitív y tengely irányába nézve) konvex, bármely részívének minden belső pontja alatta van a részív végpontjait összekötő húrnak.



1. ábra

Valóban, az $\left(x_1, \dfrac{1}{x_1}\right)$, $\left(x_2, \dfrac{1}{x_2}\right)$ pontokat összekötő szelő egyenlete (1. ábra):

$$y_h = \frac{1}{x_1} + \frac{\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}}{x_2 - x_1}(x - x_1) = \frac{1}{x_1} - \frac{x - x_1}{x_1 x_2},$$

és így a húr és a görbe ordinátáinak különbsége az x_1 és x_2 abszcisszák közti x pontban, vagyis ha $0 < x_1 < x < x_2$,

$$y_h - \frac{1}{x} = \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x}\right) - \frac{x - x_1}{x_1 x_2} = \frac{(x - x_1)(x_2 - x)}{x x_1 x_2} > 0.$$

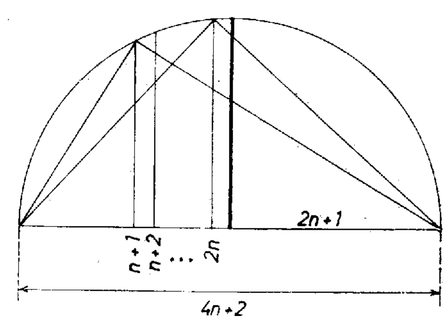
Ezt fent az

$$x_1 = n + k, \quad x_2 = 3n + 2 - k, \quad x = \frac{x_1 + x_2}{2} = 2n + 1$$

értékhármas esetében láttuk, (5) – ha 2-vel osztjuk – azt fejezi ki, hogy az x-tengely és az $1/x$ görbe x_1 és x_2 abszcisszájú pontjaival meghatározott trapéz középvonala nagyobb, mint a görbének a középvonalon levő pontjához tartozó ordináta.

Hollósy Gábor és Garay Barnabás (Sopron, Széchenyi I. Gimn., III. o. t.)

2. Hasonló a következő bizonyítás. Egy félkörív $4n + 2$ egységnyi átmérőjét egységnyi szakaszokra osztva, az $n + k$ és $3n + 2 - k$ részekre osztó pontban emelt merőlegesnek a körív alatti szakasza $k = 1, 2, \ldots, n$ esetén kisebb a középpontban emelt merőleges megfelelő szakaszánál, ami pedig $2n + 1$; így a szakaszok négyzetére, ismert tétel szerint (2. ábra):



2. ábra

$$(n + k)(3n + 2 - k) < (2n + 1)^2.$$

Reciprokukat véve és $4n + 2$-vel szorozva ismét (5)-re jutunk:

$$\frac{(3n + 2 - k) + (n + k)}{(n + k)(3n + 2 - k)} = \frac{1}{n + k} + \frac{1}{3n + 2 - k} > \frac{2}{2n + 1}.$$

Fejes Gábor (Budapest, Kossuth L. Gimn., IV. o. t.)