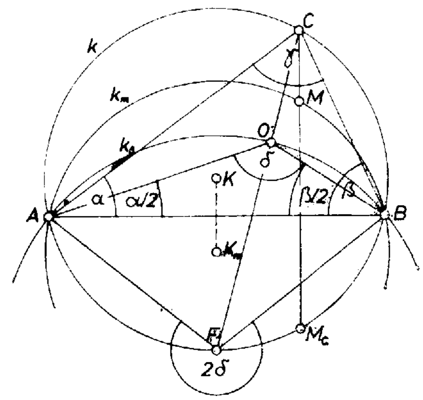
Ha a háromszög derékszögű és a derékszög csúcsa közte van a kiszemelt két csúcsnak, akkor ide esik a magasságpont is, és a kérdés tárgytalan, hiszen nem 4, hanem csak 3 különböző pontról van szó; ha pedig a kiszemelt csúcsok az átfogó végpontjai, akkor a kívánt tulajdonság nem áll fenn, hiszen a beírt kör középpontja az első 3 pont által meghatározott körön belül van. Ezért a derékszögű háromszögeket vizsgálatunkból kizárjuk.

A kérdést így is feltehetjük: mi a feltétele annak, hogy az ABC háromszög A és B csúcsa, valamint M magasságpontja által meghatározott k_m kör átmenjen a háromszögbe beírt kör O középpontján, vagy még máshogy: k_m azonos legyen az ABO háromszög köré írt k_0 körrel.

Megkönnyíti a választ egyrészt az az ismert tény, hogy M-nek a háromszög mindegyik oldalára való tükörképe rajta van a háromszög k körülírt körén. Ezt úgy is mondhatjuk: a k körbe beírt ABC háromszög A és B csúcsát rögzítve, C-t pedig k-nak egyik AB ívén mozgatva M a k-nak az AB egyenesre való k_m tükörképén mozog (1. ábra).



1. ábra

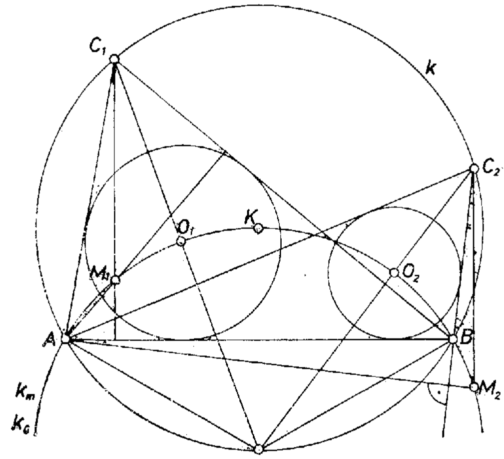
Megmutatjuk másrészt, hogy rögzített A és B, valamint az előbbiek szerint mozgó C esetében O azon a k_0 körön mozog (az AB egyenesnek természetesen a C-t tartalmazó partján), melynek F középpontja felezi a k kör C-t nem tartalmazó AB ívét, és sugara $FA = FB$. Valóban, a szokásos jelölésekkel AB-nek O-ból vett látószöge

$$\delta = 180^\circ - OAB\sphericalangle - OBA\sphericalangle = 180^\circ - \frac{\alpha+\beta}{2} = 90^\circ + \frac{\gamma}{2},$$

tompaszög, ezért F az AB egyenes túlsó oldalán van, AB felező merőlegesén, és belőle az AB szakasz látószöge egyenlő δ kiegészítő szögének 2-szeresével, ami $180^\circ - \gamma$. Ez F-nek csak a fent kimondott helyzetére teljesül. Maga az A és B csúcs természetesen nem szerepelhet O-ként.

Mármost feladatunk céljára k_m-nek és k_0-nak csak akkor van (A-tól és B-től különböző) közös pontja, ha k_0 azonos k_m-mel, sugaraikra $FA = FK = AK$ (ahol K a k középpontja), FAK egyenlő oldalú háromszög, $AKB\sphericalangle = 120^\circ$, $ACB\sphericalangle = 60^\circ$.

Fordítva azonnal látható, hogy ez a feltétel elegendő is ahhoz, hogy a vizsgált 4 pont egy körön legyen (2. ábra).



2. ábra

Juhász Júlia (Balassagyarmat, Balassi B. Gimn., IV. o. t.)