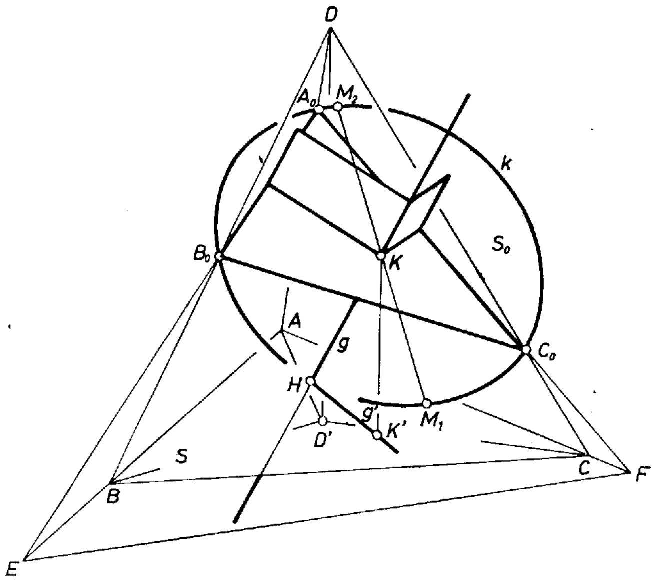
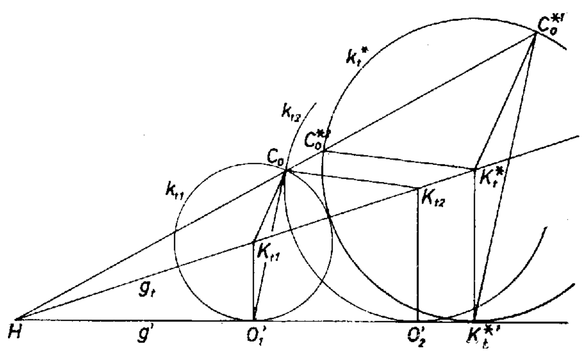
I. megoldás. I. Legyenek az előírt negyedelő pontok rendre A_0, B_0, C_0 (azaz pl. $DC_0 = 3DC/4$). Ezek nincsenek egy egyenesen, mert az A_0B_0 egyenes benne van a DAB síkban, C_0 pedig nincs benne (1. ábra), így ez a 3 pont egy síkot határoz meg, jelöljük ezt S_0 lal.



1. ábra

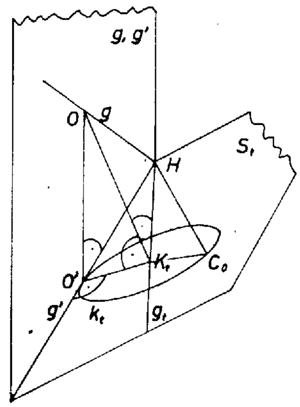
Legyen az $A_0B_0C_0$ háromszög köré írt k kör középpontja K, ekkor a háromszög csúcsaitól egyenlő távolságban levő pontok mértani helye a K-ban S,-ra állított g merőleges, ezért a keresett G gömb O középpontja g-n lesz, G-nek az S-en való O' érintési pontja pedig g-nek az $ABC = S$ alapsíkon levő g' vetületén lesz. Amennyiben G létezik, a k kör mindenesetre rajta van G-n. (g nem merőleges S-re – csak akkor lenne merőleges, ha S_0 párhuzamos lenne S-sel, ez azonban nem áll, hiszen pl. A_0 és B_0 más-más távolságban van S-től –, ezért g' nem pont.) g'-t meghatározza g-nek (S-en való) H döféspontja és K-nak K' vetülete. (H létrejön, mert g nem párhuzamos S-sel; akkor lenne párhuzamos vele, ha S_0 merőleges lenne S-re, vagyis ha A_0, B_0, C_0-nak S-en levő vetülete egy egyenesbe esnék, ez viszont nem áll fenn, mert e három vetület az ABC szabályos háromszög köré írt körnek rendre a $D'A$, $D'B$, $D'C$ sugarán van – ahol D' a D csúcs vetülete – és annak rendre első, második, harmadik negyedelő pontja.)

Mindazok a gömbök, amelyek g' valamely pontjában érintik S-et és középpontjuk a g-n van, páronként egymás képei abban a H centrumú középpontos hasonlóságban, melynek aránymutatója egyenlő sugaraik arányával. A g'-n átmenő minden egyes sík (S-et kivéve) G-ből – és bármely az imént mondott gömbből is – kört metsz ki, és ez érinti g'-t, középpontja O-nak – ill. a gömb középpontjának – a metsző síkon levő vetülete. Válasszunk tetszés szerint egy ilyen S_t síkot és egyet a mondott gömbök közül, legyen ez (a G-től különböző) G^*. Ekkor a G-ből és G^*-bó1 S_t által kimetszett k_t, k_t^* körök is egymás képei a H centrumú, $R{:}R^*$ aránymutatójú (R, R^* a gömbök sugarai) középpontos hasonlóságban, K_t, K_t^* középpontjuk g-nek S_t-n levő g_t vetületén van (amely természetesen átmegy H-n, 2. ábra).



2. ábra

Ezek alapján a következő lépésekben kapjuk G-t. S_t-nek (pl.) az előírt C_0-on átmenő síkot választjuk, g_t-nek egy tetszés szerinti K_t^* pontja körül a g'-t érintő k_t^* kört írunk, ezt metsszük a HC_0 egyenessel a C_0^{*1}, C_0^{*2} pontokban; (feltéve, hogy ezek létrejöttek) C_0-on át párhuzamost húzunk $C_0^{*1}K_t^*$-gal és $C_0^{*2}K_t^*$-gal, ekkor a g_t-n kapott K_{t1}, K_{t2} metszésponton át S_t-re (más szóval a g, g_t síkban g_t-re) állított merőleges g-ből kimetszi a keresett G_1, G_2 gömb O_1, ill. O_2 középpontját, a gömb sugara pedig természetesen ennek S-től (más szóval g'-től) mért O_1O_1', ill. O_2O_2' távolsága (3. ábra).



3. ábra

II. A feladathoz fűzött megjegyzés értelmében g az A_0B_0 és A_0C_0 szakaszok felező merőleges síkjának metszésvonala. Egy-egy ilyen síkot a szakasz két felező merőleges egyenese határoz meg, pl. A_0B_0-é egyrészt S_0-ban, másrészt egy az A_0B_0-on átmenő, C_0-t nem tartalmazó síkban. (A sík két metsző egyenese egyenértékű a sík 3, nem egy egyenesen levő pontjával.)

Hasonlóan kaphatjuk a g-re H-ban emelt merőleges síkot (g-n egy H közepű szakaszt kijelölve), ennek S-sel való metszésvonalára H-n át (S-ben) állított merőleges megadja g'-t. A többi mondott szerkesztést egy-egy síkban végeztük. (Síkbeli szerkesztéseknél nem szoktunk különbséget tenni a megengedett lépések elvi felhasználása, és azok körzővel – vonalzóval való végrehajtása között. Térbeli szerkesztéseknél azonban – mivel a megfelelő eszközök hiányoznak – a szerkesztés leírása csak a megengedett lépések alkalmas sorrendjét adja meg, és nem szolgál valamilyen szerkesztési eljárás vázlatául.)

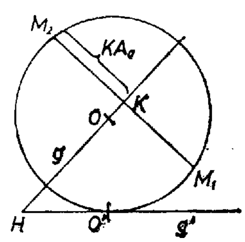
III. Eredményünk helyes voltának bizonyításában csak azt kell belátnunk, hogy G_i ($i = 1,\ 2$) átmegy C_0-on, hiszen akkor átmegy A_0-on, B_0-on is. Ehhez megjegyezzük, hogy K_{ti}-nek g'-n levő vetülete éppen O_i'. Ugyanis g'-re O_iO_i' is, O_iK_{ti} is merőlegesen áll – utóbbi azért, mert merőleges a g'-t tartalmazó S_t-re –, így az $O_iO_i'K_{ti}$ sík s vele az $O_i'K_{ti}$ egyenes merőleges g'-re.

Legyen K_t^*-nak g'-n levő vetülete, azaz k_t^* és g' érintkezési pontja $K_t^{*\prime}$ ekkor szerkesztésünk szerint $C_0K_{ti}O_i'$ a háromszög a $C_0^{*i}K_t^*K_t^{*\prime}$ háromszög képe a H centrumú, $HC_0 : HC_0^{*i}$ arányú középpontos hasonlóságban. Így $C_0^{*i}K_t^* = K_t^{*\prime}K_t^*$ alapján $C_0K_{ti} = O_i'K_{ti}$, vagyis C_0 rajta van a K_{ti} középpontú, $K_{ti}O_i'$ sugarú körön, ami pedig G_i-nek S_t-vel való metszésvonala. Ezt akartuk bizonyítani.

IV. G_i létezése és a megoldások száma azon múlik, hány közös pontja van a HC_0 egyenesnek k_t^*-vel. Amennyiben az $A_0B_0C_0$ háromszög köré írt k körnek volna pontja az S-sel kettévágott tér D-t nem tartalmazó felében, akkor a feladatnak nem volna megoldása. Esetünkben – mint a II. megoldásban majd látjuk – feladatunknak két gömb tesz eleget.

Baintner László (Budaoest, Teleki Blanak Gimn., IV. o. t.)
dolgozata alapján, egyszerűsítésekkel és kiegészítésekkel

Megjegyzés. Egyszerűbb, de az eredeti adatok felhasználásától jobban eltávolodó meggondolás a következő. Keressük meg a fenti k-nak M_1, M_2 metszéspontjait a g, g' síkon. Ekkor a g'-t érintő és M_1-en, M_2-n átmenő kör, ami hasonlósági transzformációval ismert módon megszerkeszthető, hacsak M_1, M_2 mindegyike g'-nek ugyanazon oldalán van, G-nek egy főkörét adja meg. A mondott két pontot úgy kapjuk, hogy a mondott síkban K-n át merőlegest állítunk g-re és erre mindkét irányban felmérjük k-nak KA_0 sugarát (4. ábra).

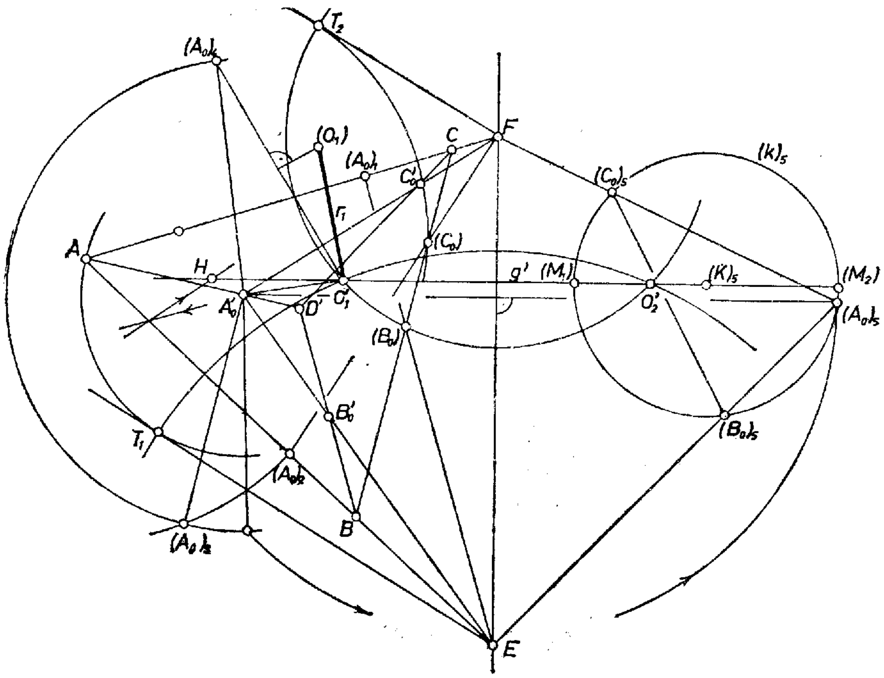


4. ábra

II. megoldás. Könnyű megszerkeszteni az O gömbközéppontnak az S alapsíkon levő O' vetületét, a gömb érintési pontját. A fenti jelöléseket tovább használva messe A_0B_0 az AB egyenest E-ben, A_0C_0 az AC-t F-ben. Ekkor EO' érintője, EA_0 pedig szelője annak a körnek, amelyet a G-ből az $\overline{A_0B_0O'}$ sík metsz ki, ezért EO' hossza egyenlő az EA_0, EB_0 szakaszok mértani középarányosával. Hasonlóan $FO' = \sqrt{FA_0 \cdot FC_0}$, és így E, F körül EO', ill. FO' sugarú kört írva, közös pontjuk O'.

Ezután O-t az $O'A_0$ szakasz felező merőleges síkja metszi ki az S-re O'-ben állított merőleges egyenesből. (Ezzel megkapjuk a gömb OO' sugarát.)

Ügyes egyszerűsítésekkel a szerkesztés S-beli részét egyetlen ábrán belül végrehajthatjuk, a külső pontoknak S-en levő vetületét a pont jele mellé tett vesszővel jelöljük (5. ábra).



5. ábra

E-t nyilvánvalóan megadja AB és $A_0'B_0'$ közös pontja, de megkapjuk úgy is, hogy az ABD háromszöget AB körül úgy fordítjuk bele S-be, hogy D a C-be jusson. Ekkor A_0-nak, B_0-nak $(A_0)_1$, (B_0) új helyzete CA-nak első, ill. CB-nek második negyedelő pontja, és E-t kimetszi az $(A_0)_1(B_0)$ egyenes. Azért célszerűbb ez, mert így az EA_0, EB_0 szakasz $E(A_0)_1$-ben, $E(B_0)$-ban mindjárt valódi nagyságban látszik. Mértani középüket úgy szerkesztettük, hogy vettük az ET_1 érintőt az A_0' középű, A-n átmenő körhöz. (Az olvasóra hagyjuk annak belátását, hogy ez a kör átmegy $(A_0)_1$ és (B_0) mindegyikén.)

Hasonlóan, az ACD háromszöget az ACB helyzetbe lefordítva az A_0C_0 egyenes új, $(A_0)_2(C_0)$ helyzete kimetszi AC-ből F-et, és az így valódi nagyságban látszó FA_0, FC_0 szakaszok mértani középarányosa az az FT_2 érintő szakasz, amit az AC szakasz első negyedelőpontja körüli, (C_0)-on átmenő körhöz húztunk F-ből. A fent mondott két kör közös pontjai O_1', O_2'. (Létezésük mutatja, hogy 2 megoldás van; megjegyezzük csupán, hogy ha a fenti k kör túlnyúlna az S síkon, akkor a két körnek nem lenne közös pontja.)

Megszerkesztettük ábránkon az O_1'-ben érintő G_1 gömb sugarát is, az $O_1'O_1A_0$ síknak $O_1'A_0'$ körül a rajz síkjába való belefordításával. Ehhez A_0-nak S fölötti $A_0'A_0$ magasságát az AA_0A_0' háromszögnek S-be, az $A(A_0)_3A_0'$ helyzetbe fordításával kaptuk, $(A_0)_3$ az A_0'-ben $A_0'A$-ra állított merőleges és az A körüli, $AA_0 = A(A_0)_2$ sugarú kör metszéspontja. Ezt A_0' körül ráfordítva az A_0'-ben $O_1'A_0'$-re állított merőlegesre, kaptuk A_0-nak az $O_1'A_0'$ tengely körül S-be fordított $(A_0)_4$ helyzetét, végül az $(A_0)_4O_1'$ szakasz felező merőlegesével az O_1'-ben $O_1'A_0'$-re állított merőlegesből kimetszettük O_1-nek S-be átfordított (O_1) képét. Így G_1, sugara $O_1'(O_1)$.

Megjegyzések. 1. Az EF egyenes S és S_0 metszésvonala, e körül az $A_0B_0C_0$ háromszöget S-be fordítva megkapjuk valódi nagyságát: $(A_0)_5(B_0)_5(C_0)_5$. (A_0)-nak EF-től való távolsága annak a derékszögű háromszögnek az átfogója, melynek egyik befogója A_0-nak fent megszerkesztett magassága, másik befogója pedig A_0'-nek EF-től való távolsága. (K-nak $(K)_5$ befordított helyzete természetesen az $O_1'O_2'$ egyenesen van, ami az I. megoldásbeli g' egyenes. Szemlélet szerint $C_0A_0 = C_0B_0$, de ez enélkül is könnyen belátható. Ez megkönnyíti k sugarának kiszámítását. Néhány, az I. megoldás szerint haladó dolgozat, erre támaszkodva mutatta meg, hogy k nem nyúlik át S túlsó oldalára.

2. Az I. megoldásbeli H pontot is könnyű megszerkeszteni két olyan egyenes metszéspontjaként, amelyet a g-t meghatározó felező merőleges síkok metszenek ki S-ből. Pl. A_0B_0 felező merőleges síkja S-et abban az egyenesben metszi, amelynek egy pontja a szakasz ABD síkbeli felező merőlegesének AB-n levő pontja (amit a fentiek szerint $(A_0)_1(B_0)$ felező merőlegese is kimetsz), és amely továbbá merőleges $A_0'B_0'$-re. H természetesen szintén az $O_1'O_2'$ egyenesen adódik.