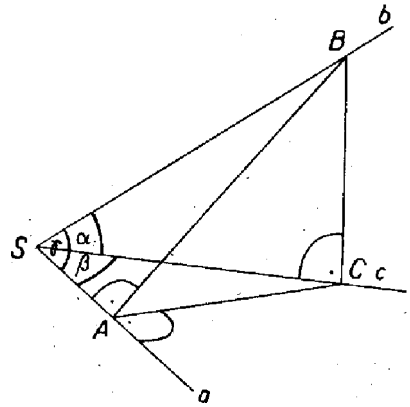
1. feladat. *A tér S pontjából három nem egy síkba eső félegyenes indul ki: a, b és c. A c és b-vel meghatározott sík merőleges a c és a-val meghatározott síkra. A b és c közti α és az a és c közti β hegyes szöget ismertnek tekintve számítsuk ki az a és b alkotta γ szöget.*

I. megoldás. Legyen az a félegyenes egy S-től különböző pontja A. Emeljünk a-ra az A pontban merőlegest a és c síkjában. Mivel α hegyesszög, ez metszi a c félegyenest egy C pontban. Hasonlóan c-re C pontjában merőlegest állítva c és b síkjában, ez metszi b-t egy B pontban (1. ábra).

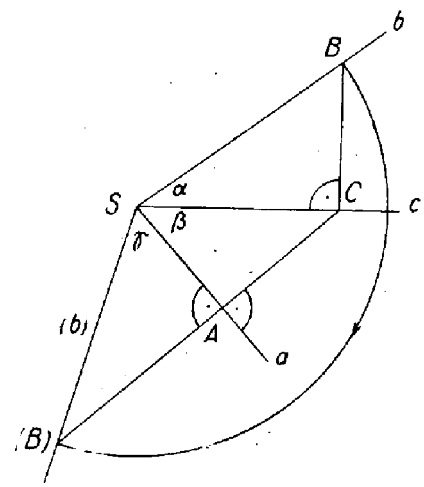


1. ábra

Az A, B, C-n átmenő Σ sík merőleges a-ra, ugyanis AC egyenese szerkesztés szerint merőleges a-ra, a CB egyenes pedig az SAC síkra merőleges SCB síkban van és merőleges a két sík SC metszésvonalára, így CB merőleges az SAC síkra, tehát annak minden egyenesére, így a-ra is. AC és CB tehát a Σ sík két a-ra merőleges egyenese, amelyek nem párhuzamosak. Így Σ merőleges a-ra, és az SAC szög mellett, ami szerkesztés szerint derékszög, derékszög az SAB szög is, és az ACB szög is, mert AC szára az SAC síkban van, CB pedig merőleges erre a síkra. Az SCB szög a szerkesztés szerint ugyancsak derékszög. A feladat feltételei szerint $BSC\sphericalangle = \alpha$, $CSA\sphericalangle = \beta$, és az $ASB\sphericalangle = \gamma$ szöget kell kiszámítanunk.

Mostmár az SBC, illetőleg SCA háromszögből $SC = SB\cos\alpha$, $SA = SC\cos\beta$, és így az SBA háromszögből

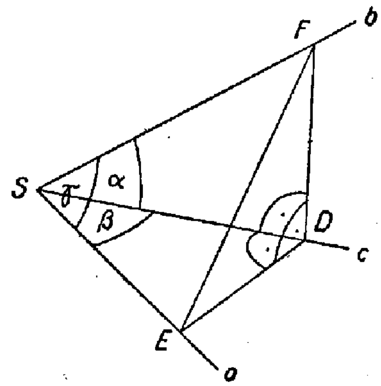
$$\cos\gamma = \cos ASB\sphericalangle = \frac{SA}{SB} = \frac{SC}{SB}\cos\beta = \cos\alpha\,\cos\beta.$$



2. ábra

Megjegyzés. A felhasznált összefüggéseket még világosabbá tehetjük ábrázoló geometriai meggondolással. Tekintsük az a, c síkot első képsíknak, a b, c síkot második képsíknak, ekkor c a képsíkrendszer tengelyében van. A képsíkoknak az a, ill. b félegyenest tartalmazó félsíkjait vegyük pozitívnak. Az a és b félegyenesekkel meghatározott síkot a – mint a sík első nyomegyenese – körül az első képsíkba leforgatva a 2. ábrát kapjuk, ezen mindhárom felhasznált derékszögű háromszög valódi nagyságban látható. (B)-et – különbségi háromszög mellőzésével – kimetszhetjük a C-n át a-ra állított merőlegesből az $SB = S(B)$ egyenlőség alapján, ugyanis az SB szakasz mind a második képsíkon, mind a leforgatásban valódi nagyságban látszik.

A legtöbb versenyző több trigonometriai ismeret felhasználásával – de viszont kevesebb diszkusszióval – végezte el a számítást. Ilyen a következő



3. ábra

II. megoldás. Legyen a c félegyenes egy S-től különböző pontja D, és emeljünk c-re merőlegest mind az a, c, mind a b, c síkban. Mivel α és β hegyesszögek, ezek metszik a-t E-ben, ill. b-t F-ben (3. ábra). Az EDF szög az SDE és SDF síkok hajlásszöge, tehát a DEF háromszögben D-nél derékszög van, továbbá az SED és SFD háromszögek is derékszögűek. A keresett γ szöget tartalmazó SEF háromszög mindhárom oldalát kifejezhetjük SD-vel és az ismert szögekkel:

$$SE = \frac{SD}{\cos\alpha}, \quad SF = \frac{SD}{\cos\beta},$$

továbbá $DE = SD\operatorname{tg}\beta$, $DF = SD\operatorname{tg}\alpha$,
és így

$$EF = \sqrt{DE^2 + DF^2} = SD\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta}.$$

Ezekkel a koszinusz-tétel alapján

$$\cos\gamma = \cos ESF\sphericalangle = \frac{SE^2 + SF^2 - EF^2}{2SE\cdot SF}.$$

A számláló jól ismert azonosságok felhasználásával így alakítható:

$$SE^2 + SF^2 - EF^2 = SD^2\left(\frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{1}{\cos^2\beta} - \operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\beta\right) =$$
$$= SD^2\left(\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \operatorname{tg}^2\alpha + \frac{\sin^2\beta + \cos^2\beta}{\cos^2\beta} - \operatorname{tg}^2\beta\right) = 2SD^2,$$

tehát

$$\cos\gamma = 2SD^2 : \frac{2SD^2}{\cos\alpha\cos\beta} = \cos\alpha\cos\beta.$$

Megjegyzés. Több versenyző rámutatott, hogy hasonlóan számíthatjuk γ-t akkor is, ha az a, c és b, c félegyenes-párokkal meghatározott síkok szöge tetszés szerinti ε szög. Az EDF szög éppen ezt a lapszöget méri, tehát

$$EF^2 = DE^2 + DF^2 - 2DE\cdot DF\cos\varepsilon,$$

és így $DE/SE = \sin\beta$, $DF/SF = \sin\alpha$ figyelembevételével

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos\varepsilon.$$

Ezt az összefüggést a gömbháromszögtan *oldal-koszinusz-tétel*ének szokás nevezni; érvényességének feltételeivel itt tovább nem foglalkozunk.

2. feladat. *a és b két különböző természetes szám. Határozzuk meg mindazokat az n természetes számokat, amelyekre az*

$$ax + by = n \tag{1}$$

egyenletnek nincs megoldása nem negatív egész számokban.

Megoldás. I. Ha x_0, y_0 megoldása (1)-nek, akkor az első tagból levonva ab-t, a másodikhoz hozzáadva

$$n = ax_0 - ab + by_0 + ab = a(x_0 - b) + b(y_0 + a)$$

is teljesül, vagyis $x_0 - b$, $y_0 + a$ is megoldás, és általában, ha t tetszés szerinti egész szám, akkor

$$a(x_0 - tb) + b(y_0 + ta) = n$$

is fennáll. Ha tehát van egy x_0, y_0 megoldásunk, akkor választhatjuk t-t úgy, hogy x_0 helyébe a lehető legkisebb nem negatív érték kerüljön: mindig választható t úgy, hogy $x_1 = x_0 - tb$ 0 és $b-1$ közt legyen (ha nem lett volna már x_0 ilyen; utóbbi esetben $t=0$ választható).

Ha x_0, y_0 nem negatív, akkor $y_1 = y_0 + ta$ sem negatív, mert $a > 0$ és ha

$$x_1 \geq 0 \text{ és } b > 0, \text{ akkor } t \geq 0.$$

Elegendő tehát azokat az értékeket vizsgálni, amelyeket $ax + by$ az $x = 0, 1, \ldots, b-1$ értékek és tetszés szerinti nem negatív egész y-ra vesz fel. Amely n számok ezek közt nem szerepelnek, azokra nem oldható meg az (1) egyenlet.

II. Szorítkozzunk egyelőre arra az esetre, ha a és b relatív prímek. Az általános esetet nem lesz nehéz erre visszavezetni. Ekkor a következő táblázatban szerepelnek azok az n értékek, amelyekre (1) megoldható:

$$(2)\qquad \begin{array}{rrrrlrl}
0, & b, & 2b, & 3b, & \ldots, & jb, & \ldots \\
a, & a+b, & a+2b, & a+3b, & \ldots, & a+jb, & \ldots \\
2a, & 2a+b, & 2a+2b, & 2a+3b, & \ldots, & 2a+jb, & \ldots \\
3a, & 3a+b, & 3a+2b, & 3a+3b, & \ldots, & 3a+jb, & \ldots \\
. & . & . & . & \ldots & . & \ldots \\
(b-1)a, & (b-1)a+b, & (b-1)a+2b, & (b-1)a+3b, & \ldots & (b-1)a+jb, & \ldots
\end{array}$$

Egy-egy sorban b különbségű számtani sorozat áll, tehát bármely két szám különbsége osztható b-vel, és így két ugyanabban a sorban álló szám b-vel osztva ugyanazt a maradékot adja.

Megmutatjuk, hogy különböző sorokban álló számok viszont különböző maradékot adnak b-vel osztva. Egy sor számai ugyanazt a maradékot adják, mint pl. az első szám. Ha a k_1-edik és a k_2-edik sor számai ugyanazt a maradékot adnák, akkor kezdő számaik különbsége: $(k_1 - k_2)a$ osztható volna b-vel. Ez azonban nem lehet, ugyanis a és b relatív prímek, és ha egy szám egy szorzatnak osztója, de az egyik tényezőhöz relatív prím, akkor osztója a másik tényezőnek; $(k_1 - k_2)a$ tehát csak úgy lehetne b-vel osztható, ha $k_1 - k_2$ osztható volna b-vel. Azonban k_1 is, k_2 is kisebb b-nél és egyik sem negatív, így $|k_1 - k_2| < b$, tehát nem lehet b-vel osztható. Így $k_1 a$ és $k_2 a$ különböző maradékot ad b-vel osztva.

Mivel b sorunk van és b lehetséges maradékunk (a $0, 1, 2, \ldots, b-1$ számok), így minden maradék előfordul, és csak egyszer. Egy adott szám tehát legfeljebb egy sorban fordulhat elő és ott is csak egyszer, mert a sor egymás utáni számai állandóan nőnek.

Megállapításaink akkor is érvényben maradnak, ha a sorokat bal felé is folytatjuk b ismételt levonásával, hiszen az egyes sorokról csak annyit használtunk ki, hogy a szomszédos számok különbsége b.

Az így kiegészített táblázatban minden egész szám szerepel. Ha ugyanis n tetszés szerinti egész szám, és a k-adik sor az, amelynek a számai – köztük $(k-1)a$ is – ugyanazt a maradékot adják, mint n, akkor $n - (k-1)a$ osztható b-vel, tehát van olyan j egész szám, amelyre $n - (k-1)a = bj$, $n = (k-1)a + bj$. Így n a k-adik sornak a $(k-1)a$-tól számított j-edik száma jobbra vagy balra j előjele szerint.

Mivel a sorokat balra folytatva mindegyikben elegendő lépés után csupa negatív szám áll (a-szori levonás után biztosan), így csak véges számú olyan pozitív egész n szám van, amelyikre nincs (1)-nek nem negatív egészekből álló megoldása, és ezek a táblázat kiegészítésekor, tehát az

$$(3)\qquad \begin{array}{rrrl}
a-b, & a-2b, & a-3b, & \ldots \\
2a-b, & 2a-2b, & 2a-3b, & \ldots \\
. & . & . & \ldots \\
(b-1)a-b, & (b-1)a-2b, & (b-1)a-3b, & \ldots
\end{array}$$

táblázatban fellépő pozitív számok.

III. Ha a és b nem relatív prímek, jelöljük legnagyobb közös osztójukat d-vel, és legyen $a = d \cdot a'$, $b = d \cdot b'$; itt a' és b' relatív prímek. Ekkor (2) minden száma többszöröse d-nek, mert $ax + by = d(a'x + b'y)$, tehát minden a d-vel nem osztható természetes szám hiányzik (2)-ből, és így megfelel a feladat követelményének.

Ha viszont $n = d \cdot n'$, akkor az $ax + by = n$ és $a'x + b'y = n'$ egyenletnek ugyanazok a számpárok a megoldásai. Így ha a', b'-ből kiindulva írjuk fel a (3)-nak megfelelő táblázatot, az abban fellépő pozitív számok d-szeresei felelnek meg d többszörösei közül a feladat feltételeinek. Ezek azonban éppen a (3) táblázatban fellépő pozitív számok.

Az (1) egyenletnek tehát akkor nincs nem negatív egészekből álló megoldása, ha n a (3) táblázatban fellépő valamelyik természetes szám, továbbá ha a és b legnagyobb közös osztójával nem osztható (ha e két szám nem relatív prím egymáshoz).

Megjegyzések. 1. Ha a és b relatív prímek egymáshoz, a feladat követelményének megfelelő legnagyobb természetes szám a (3) táblázat bal alsó sarkában álló $ab - a - b$ szám.

2. Könnyen látható az is, hogy ha $0 \leq n \leq ab - a - b$, akkor n és $ab - a - b - n$ közül az egyik kielégíti a feladat követelményeit, a másik nem. Valóban, egyrészt ha volnának olyan x_1, y_1, x_2, y_2 nem negatív egész számok, amelyekre

$$ax_1 + by_1 = n \qquad \text{és} \qquad ax_2 + by_2 = ab - a - b - n,$$

akkor

$$a(x_1+x_2)+b(y_1+y_2)=ab-a-b$$

volna, és x_1+x_2, y_1+y_2 nem negatív, holott éppen láttuk, hogy ennek az egyenletnek nincs nem negatív egészekből álló megoldása. Így legfeljebb az egyik egyenletnek van nem negatív megoldása.

Másrészt láttuk, hogy az (1) egyenletnek mindig van egész megoldása, és van olyan x_1, y_1, megoldása is, amelyben $0\le x\le b-1$. Ha most az egyenletnek nincs nem negatív egészekből álló megoldása, akkor $y_1<0$. Ekkor

$$ab-a-b-n=a(b-1-x_1)+b(-1-y_1),$$

és itt $x_2=b-1-x_1\ge 0$, $y_2=-1-y_1\ge 0$ egy nem negatív egészekből álló megoldás.

3. A $0, 1, 2, \dots, ab-a-b$ számoknak ezek szerint pontosan a fele elégíti ki a feladat követelményeit, tehát

$$\frac{ab-a-b+1}{2}=\frac{(a-1)(b-1)}{2}$$

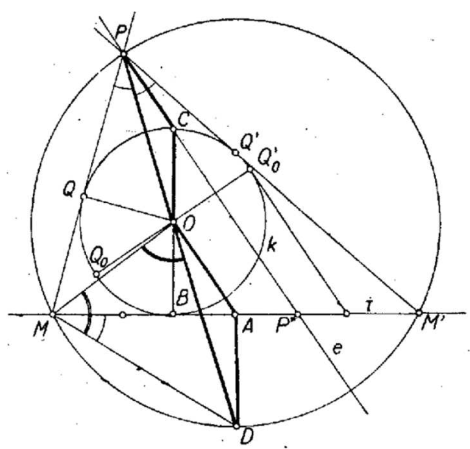
a megfelelő számok száma. (Ez mindig egész, mert ha a és b relatív prímek, akkor legalább az egyik páratlan.)

3. feladat. *Egy k kör valamely t érintőjének két pontja A és M. Jelöljük M-nek A-ra vonatkozó tükörképét M'-vel. Tekintsük az M-ből és M'-ből a k-hoz húzott második érintőket. Mi ezek metszéspontjának mértani helye, ha M végigfut t-n?*

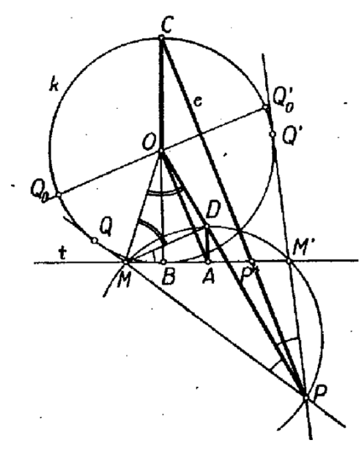
Az alábbi megoldásokban a következő jelöléseket fogjuk használni: t érintési pontja legyen B, k-nak ezzel átellenes pontja C, k középpontja O, az M-ből és M'-ből húzott második érintők metszéspontja P, érintési pontjuk k-n Q és Q'.

I. megoldás. Azt fogjuk megmutatni, hogy az M pont minden helyzeténél a PC egyenes párhuzamos OA-val, ehhez azonban előbb megvizsgáljuk a P pont lehetséges helyzeteit a körhöz és t-hez viszonyítva.

Van az M, M' pontpárnak egy olyan helyzete, amelyben a k-hoz húzott második érintők párhuzamosak. Ezt a pontpárt úgy kaphatjuk meg, hogy k-nak az AO-ra merőleges átmérője végpontjaiban, (Q_0, Q_0'-ben) húzunk érintőket. Ezek A-ra szimmetrikus pontpárt metszenek ki t-ből, mert OA a köztük levő sáv középvonala. Ha M, M' a sávon kívül van, akkor Q, Q' a C-t tartalmazó Q_0, Q_0' félkörön van, így a második érintők metszik egymást, még pedig t-nek azon a partján, amelyiken k van; így k a PMM' háromszögnek beírt köre (4. ábra).



4. ábra

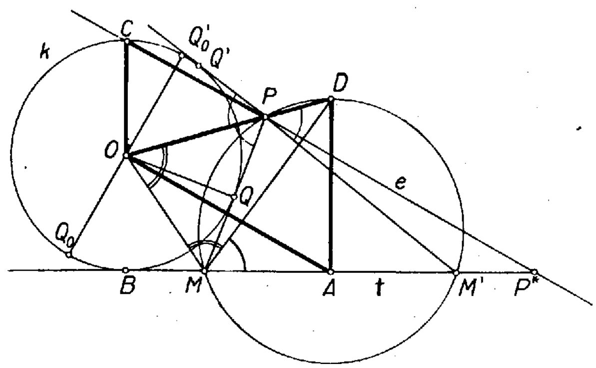


5. ábra

Ha M, M' a két párhuzamos közt van, akkor Q, Q' a B-t tartalmazó Q_0, Q_0' félkörön van, így most is metszik egymást az érintők. Ha az M, M' pontpár közrefogja B-t, akkor Q és Q' is közrefogja B-t a félkörön. Ekkor P a t érintő ellenkező partján keletkezik, mint k, és k a PMM' háromszög MM' oldalához hozzáírt kör (5. ábra).

Ha M és M' egyike B-be esik, és ez különbözik A-tól, akkor ebből a pontból nem húzható t-től különböző érintő, viszont tekinthetjük a második érintőnek is t-t. A másik pont ekkor B-nek A-ra vonatkozó tükörképe, és ez a két második érintő metszéspontja is, tehát a mértani helynek az M és M' mondott helyzetéhez tartozó pontja is.

Ha végül az M és M' pontok egyike A és B közé esik, akkor P a másik pontból húzott érintőnek az érintkezési pont és a t egyenes közé eső szakaszán keletkezik. Ekkor k a PMM' háromszög egyik olyan hozzáírt köre, amelyik az MM' oldal meghosszabbítását érinti (6. ábra).



6. ábra

Ha A egybeesik B-vel, akkor k is, t is, az M, M' pontpár is, így a belőlük húzott érintőpár is tükrös a BC egyenesre, tehát a P pont ezen az egyenesen van. Az egyenes bármely a körön kívüli pontjából két szimmetrikus érintő húzható k-hoz, ezek szimmetrikus M, M' pontpárt metszenek ki t-ből, amiből kiindulva éppen a kiszemelt P pontot kapjuk meg. A B és C pontban csak egy-egy érintő húzható k-hoz; az utóbbi nem metszi t-t, az előbbi viszont éppen t, így nem adható meg olyan pontpár, amelyikből kiindulva B-t vagy C-t kapnánk a mértani hely pontjaiként. Ebben az esetben tehát a BC egyenes k-n kívüli két félegyenese a keresett mértani hely. (A PC és OA egyenes ebben az esetben egybeesik, ami megfelel állításunknak.)

Tegyük fel a továbbiakban, hogy A és B különböző.

Nyilvánvaló, hogy M és M' felcserélésével ismét A-ra tükrös pontpárt kapunk, a hozzájuk tartozó P pont pedig nem változik. Így elegendő azokat a P pontokat vizsgálni, amelyek az A-ból B-n át húzott félegyenesen levő M pontokhoz tartoznak; hiszen ha M a másik félegyenesen fut végig, akkor P az előbbi M pontokhoz tartozó mértani helyet futja be még egyszer.

Térjünk most állításunk bizonyítására. Az O pont a PMM' háromszög P-ből induló belső vagy külső szögfelezőjén van, aszerint hogy k az MM' szakaszt érinti, vagy annak meghosszabbítását. Jelöljük a kérdéses szögfelező és a PMM' háromszög köré írt kör metszéspontját D-vel. A belső szögfelező metszéspontja a P-t nem tartalmazó MM' ív felezőpontja, mivel pedig a belső és külső szögfelező egymásra merőleges, így P és a két szögfelező k-val való metszéspontja derékszögű háromszöget alkot. Ennek átfogója a körnek átmérője. Így a külső szögfelező a körülírt kört a belső szögfelező metszéspontjával átellenes pontban, vagyis a P-t tartalmazó MM' ív felezőpontjában metszi. Bármelyik pontból bocsátunk is merőlegest MM'-re, az azt felezőpontjában, A-ban metszi.

Állításunkat úgy bizonyítjuk, hogy megmutatjuk mindegyik esetben a COP és ADO háromszögek hasonlóságát. Könnyű látni, hogy az OPQ és DMA derékszögű háromszögek hasonlók. Valóban, ha O a P-nél levő belső szög felezőjén van, akkor a kerületi szögek összefüggését felhasználva

$$DMA\sphericalangle = DMM'\sphericalangle = DPM'\sphericalangle = DPM\sphericalangle = OPQ\sphericalangle.$$

Ha pedig O a külső szögfelezőn van, akkor

$$DMA\sphericalangle = DMM'\sphericalangle = DPM'\sphericalangle = OPQ'\sphericalangle = OPQ\sphericalangle.$$

Az OPQ és DMA háromszög szögei tehát mindkét esetben megegyeznek s így

$$\frac{PO}{OQ} = \frac{MD}{DA}. \tag{1}$$

Itt OQ, mint körsugár, egyenlő OC-vel, állításunk igazolásához így szükségünk van annak a megmutatására, hogy $DO = DM$.

Ha k a PMM' háromszög beírt köre, akkor MO is a háromszög belső szögfelezője, s így, mint az MOP háromszög külső szöge

$$MOD\sphericalangle = OPM\sphericalangle + OMP\sphericalangle = DMM'\sphericalangle + OMM'\sphericalangle = DMO\sphericalangle.$$

Ha k az MM' oldalhoz hozzáírt kör, akkor MO a PMM' háromszög külső szögét felezi, s így ismét az MOP háromszögből indulva ki

$$MOD\sphericalangle = 180^\circ - (OPM\sphericalangle + OMP\sphericalangle) = 180^\circ - (OPM\sphericalangle + M'MP\sphericalangle +$$
$$+ OMM'\sphericalangle) = 180^\circ - (DMM'\sphericalangle + M'MP\sphericalangle + OMQ\sphericalangle) = DMO\sphericalangle.$$

Ha k a PMM' háromszög PM oldalához hozzáírt kör, akkor PO is, MO is a háromszög megfelelő külső szögét felezi, s így ismét az MOP háromszögből indulva ki

$$MOD\sphericalangle = 180^\circ - (OPM\sphericalangle + OMP\sphericalangle) = 180^\circ - (DMM'\sphericalangle + OMB\sphericalangle) =$$
$$= DMO\sphericalangle.$$

Eszerint az ODM háromszög OD-vel és DM-mel szemben levő szögei mindhárom esetben egyenlők, s így valóban $OD = DM$. Ezt, továbbá az említett $OQ = OC$ egyenlőséget felhasználva (1)-ből

$$\frac{PO}{OC} = \frac{OD}{DA}.$$

Az ADO és COP háromszögek itt szereplő oldalai párhuzamosak. Az első esetben D a t egyenes ellenkező partján van, mint k, s így DA és OB ellenkező irányban, DA és OC pedig egy irányban párhuzamos, DO és OP szintén.

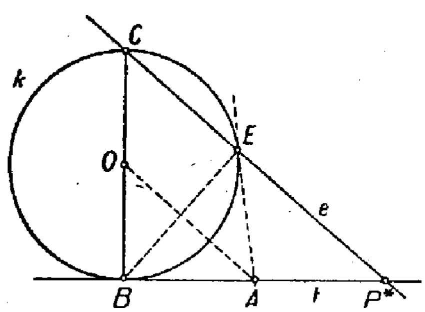
A második és harmadik esetben D és k a t egyenes egy partján van, így DA és OC ellenkező irányban párhuzamos. Másrészt D a második esetben az OP szakaszon van, a harmadik esetben a szakasz P-n túli meghosszabbításán, így OD és PO is ellenkező irányban párhuzamosak. Ennek folytán az ADO és COP háromszög mindhárom esetben hasonló, mert két oldaluk aránya és a köztük levő szög megegyezik, és hasonló helyzetű is. Így a harmadik oldalpár is párhuzamos:

$$PC \parallel OA.$$

Eszerint P mindig a C ponton át az (M ponttól független) OA egyenessel párhuzamos e egyenesen van. Nyilván nem lehet az egyenes k körbe eső húrján.

Ha P az e egyenes egy a körön kívüli és nem a t-n levő pontja, akkor húzzuk meg belőle az egyik érintőt k-hoz és tükrözzük ennek t-vel való metszéspontját A-ra. Az így kapott pontpárt választva M, M'-nek, az ezekből húzott érintők metszik egymást, mert csak az OA-val (s így e-vel is) párhuzamos érintőpár nem metszi egymást. A metszéspont egyrészt a bizonyítottak szerint e-n van, másrészt a meghúzott érintőn, tehát a kiválasztott P pont.

Legyen e metszéspontja t-vel P^* (7. ábra), ekkor OA párhuzamos a BCP^* háromszög CP^* oldalával és a BC oldal O felezőpontjából indul ki, tehát a háromszög középvonala; így A felezi a BP^* szakaszt, vagyis P^* a B pont tükörképe A-ra, de ekkor, mint a megoldás elején láttuk, a mértani hely B, P^* pontpárhoz tartozó pontja P^*.



7. ábra

Vizsgáljuk meg végül e metszéspontjait k-val. A C-ben húzott érintő párhuzamos t-vel, nem keletkezhet tehát annak semelyik pontjából húzott érintőként, és nem megy át rajta a kör más pontjához húzott érintő sem. Így C nem tartozik a mértani helyhez.

A másik E metszéspont nem más, mint az A-ból k-hoz húzott második érintő érintési pontja, ugyanis AO-ra tükrözve B-t a tükörkép egyrészt k-n van, mert annak középpontján átmenő egyenesre tükröztünk, másrészt e-n, mert egy háromszög egy csúcsát a szemközti oldallal párhuzamos középvonalra tükrözve a tükörkép a szemközti oldalán van. Így B tükörképe csak E lehet, és AE az AB egyenes tükörképe, tehát érinti a k kört.

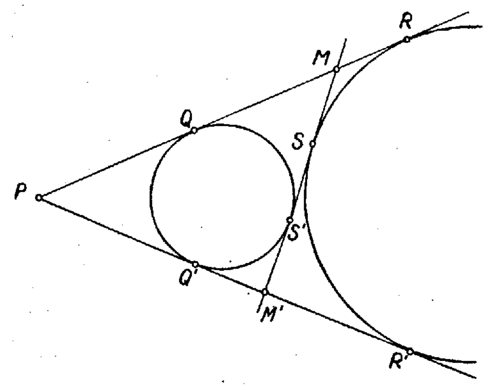
Eszerint az E-ben húzott érintő A-ban metszi t-t. Ez a pont saját tükörképe, egybeeső M, M' pontpárt kapunk, a belőlük húzott második érintők is egybeesnek, tehát nincs meghatározott metszéspontjuk, s így E nem tartozik a mértani helyhez.

A keresett mértani hely tehát a C-n át AO-val párhuzamosan húzott (vagy C-n és az A-ból húzott érintő E érintési pontján át, vagy C-n és a B pont A-ra vonatkozó P^* tükörképén át húzott) egyenesnek a k-n kívül eső két félegyeneséből áll.

II. megoldás. A P pont lehetséges helyzeteire vonatkozó megállapításokat nem ismételjük meg és csak azt az esetet vizsgáljuk, ha $A \neq B$. Legyen D a B pont tükörképe A-ra. Azt fogjuk megmutatni, hogy P mindig a CD

egyenesen van, mégpedig úgy, hogy először belátjuk, hogy ha k a PMM' háromszög beírt köre, akkor D az MM' oldalhoz hozzáírt kör érintési pontja, ha k az MM' oldalhoz hozzáírt kör, akkor D a beírt kör érintési pontja, ha pedig k az MP oldalhoz hozzáírt kör, akkor D az $M'P$ oldalhoz hozzáírt kör érintési pontja. Jelöljük a második kört mindhárom esetben k^*-gal, középpontját O^*-gal.

Az első két esetben a P-ből induló oldalak k és k^* közös külső érintői, MM' pedig az egyik közös belső érintő, a harmadik esetben pedig a P-n átmenő érintők a közös belső érintők, MM' pedig az egyik külső közös érintő. Állításunk ennek folytán úgy fogalmazható, hogy két kör egy közös külső érintőjén az érintési pontok közti szakasz, és a belső érintők metszéspontjai közti szakasz felezőpontja közös, és hasonlóan egy belső közös érintőn az érintési pontok és a külső közös érintők metszéspontja közti szakasz középpontja szintén azonos. Ezt fogjuk először bizonyítani.



8. ábra

Legyen tehát két kör két közös külső érintőjének metszéspontja P, az egyik érintő érintse a köröket Q, ill. R pontban, a másik Q', ill. R'-ben (8. ábra). Egy közös belső érintő messe az előbbit egy M pontban, az utóbbit M'-ben, és legyen az M-hez közelebbi érintési pont S, a másik S'. Ekkor az egy pontból egy körhöz húzható érintők egyenlősége folytán

$$PR = PQ + QM + MR = PQ + S'M + SM = PQ + MM' + SM - M'S',$$

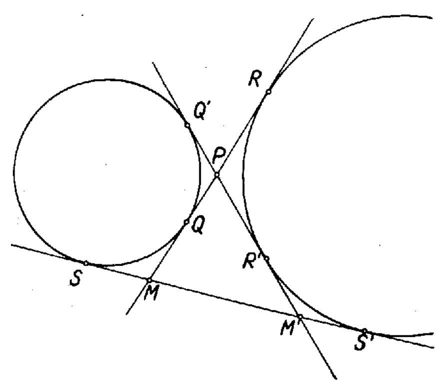
és hasonlóan

$$PR' = PQ' + Q'M' + M'R' = PQ' + M'S' + M'S =$$
$$= PQ' + MM' - MS + M'S'.$$

Mivel még $PR = PR'$ és $PQ = PQ'$, így kell, hogy

$$MS - M'S' = M'S' - MS,$$

amiből $MS = M'S'$. Ez pedig éppen azt jelenti, hogy az MM' és SS'szakaszok felezőpontja egybeesik.



9. ábra

Hasonló jelöléseket használva két közös belső érintő esetén (9. ábra)

$$PR = MR - PQ - QM = MS' - PQ - MS = MM' - PQ + M'S' - MS,$$

és hasonlóan

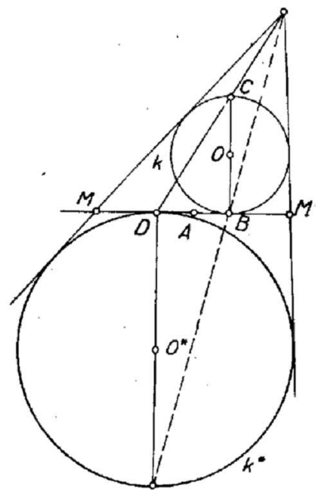
$$PR' = Q'M' - PQ' - R'M' = SM' - PQ' - M'S' = MM' - PQ' + SM - M'S'.$$

A két összefüggésből, mivel $PR = PR'$, $PQ = PQ'$, így ismét következik, hogy $MS = M'S'$, s így az MM' és SS' szakaszok felezőpontja ez esetben is egybeesik.

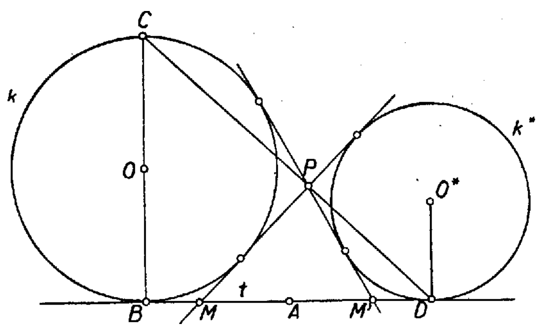
Ez feladatunkra alkalmazva valóban azt adja, hogy mind a három esetben k és k^* körök B és D érintési pontjai egymás tükörképei az MM' szakasz A felezőpontjára nézve, és ezt akartuk belátni.

P az első két esetben k és k^* külső hasonlósági pontja, a harmadik esetben pedig belső hasonlósági pontjuk, így következik, hogy P, C és D egy egyenesen vannak, ha belátjuk, hogy a mondott P középpontú hasonlóságoknál a C és D pont mindig megfelelő pontok.

Az első és második esetben k és k^* t különböző oldalán van (10. ábra), így OB, O^*D ellenkező irányban merőlegesek t-re, OC és O^*D tehát egyirányú párhuzamos sugarak, így a külső hasonlósági pontra nézve C és D a két kör egymásnak megfelelő pontjai.



10. ábra



11. ábra

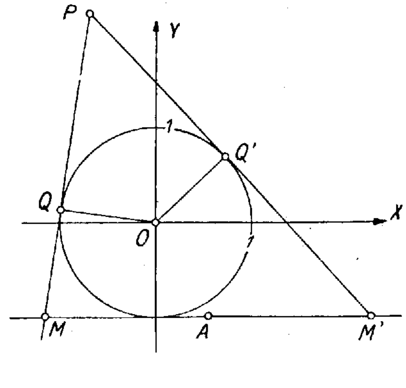
A harmadik esetben k és k^* t-nek ugyanazon az oldalán van (11. ábra), így OB és O^*D egy irányban, OC és O^*D tehát ellenkező irányban párhuzamosak. P most belső hasonlósági pont, erre nézve C és D ismét egymásnak megfelelő pontok. Ezzel bebizonyítottuk, hogy C, D és P mindig egy egyenesen van, vagyis, mivel a C és D pontok nem változnak M-mel, a mértani hely pontjai a CD egyenesen vannak.

Az, hogy ennek az egyenesnek mely pontjai tartoznak a mértani helyhez, az előbbi megoldáshoz teljesen hasonlóan tárgyalható. Ezt itt nem ismételjük meg.

A versenyzők legtöbbje a koordinátageometria módszereivel kereste a mértani helyet. Bemutatunk egy ilyen megoldást.

III. megoldás. Válasszuk origónak a k kör O középpontját, távolságegységének a sugarát, és az X-tengely legyen párhuzamos t-vel úgy, hogy t a $(0,-1)$ pontban érintse k-t. Jelöljük A abszcisszáját a-val, tehát A az $(a,-1)$ pont (12. ábra). Az M és M' pontok a t-n vannak, tehát $(z,-1)$, ill. $(z',-1)$ alakúak a koordinátáik. Mivel a köztük levő szakasz felezőpontja A, így

(1) $$z+z'=2a.$$



12. ábra

Az M, ill. M' pontból húzott érintő érintse a kört a Q (u, v), ill. $Q'(u', v')$ pontban. Ekkor

$$u^2 + v^2 = u'^2 + v'^2 = 1, \tag{2}$$

mert a pontok a körön vannak. Az OQ sugár iránytangense v/u (ha $u \neq 0$), így a Q-n át OQ-ra merőlegesen haladó egyenes egyenlete (ha $v \neq 0$)

$$y - v = -\frac{u}{v}(x - u), \quad \text{vagy} \quad ux + vy = u^2 + v^2 = 1.$$

Az egyenlet megadja a Q-n átmenő érintőt az $u = 0$ ($v = 1$, vagy $v = -1$) és a $v = 0$ ($u = 1$, vagy $u = -1$) esetben is.

Ez az érintő átmegy M-en, tehát

$$uz - v = 1, \qquad v = uz - 1,$$

és ezt (2)-be írva

$$u^2 + (uz - 1)^2 = 1, \quad u\big[(1 + z^2)u - 2z\big] = 0.$$

Hagyjuk egyelőre figyelmen kívül az $u = 0$ esetet, ekkor

$$u = \frac{2z}{1 + z^2}, \text{ így } v = uz - 1 = \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1},$$

és az M pontból húzott érintő egyenlete így írható:

$$2zx + (z^2 - 1)y = z^2 + 1. \tag{3}$$

Hasonlóan az M' ponton átmenő érintő egyenlete:

$$2z'x + (z'^2 - 1)y = z'^2 + 1. \tag{3a}$$

A P metszéspont x_P, y_P koordinátáit kiszámíthatjuk pl. úgy, hogy az első egyenlet z'-szöröséből levonjuk a második z-szeresét:

$$\big[z'(z^2 - 1) - z(z'^2 - 1)\big]y_P = z'(z^2 + 1) - z(z'^2 + 1),$$
$$(z - z')\big[(zz' + 1)y_P - zz' + 1\big] = 0.$$

Ismét hagyjuk figyelmen kívül egyelőre a $z = z'$ esetet (amikor M és M' egybeesik, s így megegyezik A-val), ekkor, amennyiben $zz' \neq -1$,

$$y_P = \frac{zz' - 1}{zz' + 1}, \tag{4}$$

és ha $z \neq 0$, akkor pl. az M-ből húzott érintő egyenletéből

$$x_P = \frac{z^2 + 1}{2z} - \frac{z^2 - 1}{2z} \cdot \frac{zz' - 1}{zz' + 1} = \frac{z + z'}{zz' + 1} = \frac{2a}{zz' + 1}. \tag{5}$$

(Felhasználtuk az (1) összefüggést.) Az utóbbi egyenletből, ha $x_P \neq 0$

$$zz' = \frac{2a}{x_P} - 1, \tag{6}$$

és ezt y_P kifejezésbe beírva

$$y_P = \frac{\dfrac{2a}{x_P} - 2}{\dfrac{2a}{x_P}} = 1 - \frac{x_P}{a}, \text{ vagy } x_P + ay_P = a.$$

A keresett mértani hely pontjai tehát az

$$x + ay = a \tag{7}$$

egyenesen vannak, eltekintve esetleg a figyelmen kívül hagyott esetekhez tartozó pontoktól.

Vizsgáljuk meg, hogy (7) mely pontjai keletkeznek mint alkalmas M és M' pontokból húzott érintők metszéspontjai. Ezek azok a pontok, amelyek koordinátái alkalmas z és z' (valós) számokkal (4), (5) alakban írhatók. Az ilyen z (és (1) szerint neki megfelelő z') értéket az M-ből húzott érintő (3) egyenletéből számíthatjuk ki. Azt z szerint rendezve

$$(y - 1)z^2 + 2xz - y - 1 = 0.$$

Innen

$$z = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 + y^2 - 1}}{y - 1},$$

tehát azokhoz az x, y értékpárokhoz, az egyenesnek azokhoz a pontjaihoz tartozik ilyen z érték, amelyekre

$$x^2 + y^2 - 1 \geq 0,$$

vagyis amelyek nincsenek a k körben, és amelyekre $y \neq 1$, tehát a körrel való $(0, 1)$ metszéspontot is figyelmen kívül kell hagynunk. A második metszéspontra $x^2 + y^2 - 1 = 0$, de $y \neq 1$, így, felhasználva (7)-et

$$z = \frac{-x}{y - 1} = a,$$

ekkor (1)-ből $z' = a$. Az M és M' pont tehát egybeesik (és azonos A-val), így nincs a belőlük húzott érintőknek meghatározott metszéspontja. Ez a pont sem tartozik tehát a mértani helyhez. Ezzel a korábban kizárt $z = z'$ esetet is elintéztük, mert (1) szerint ekkor közös értékük csak a lehet.

Meg kell még vizsgálnunk a korábban a tárgyalásból kizárt eseteket, hogy tartozik-e azokhoz és milyen pontja a mértani helynek. Természetesen minden kizárt esettel együtt az M helyett M'-re vonatkozó megfelelő esetet is tárgyalni kell, ez azonban a két pont szimmetrikus szerepe miatt nem fog külön feladatot jelenteni.

Korábban figyelmen kívül hagytuk az $x = 0$ értéket. A (7) egyenes ehhez tartozó pontjának ordinátája $y = 1$, és éppen láttuk, hogy ez sem tartozik a mértani helyhez.

Kizártuk azt, hogy az M (vagy M') pontból húzott érintő érintési pontjának u (vagy u') abszcisszája 0 legyen. Ebben az esetben az érintési pont csak $(0, 1)$ vagy $(0, -1)$ lehet. Az előbbi eshetőséget már éppen kizártuk.

Az M-ből és M'-ből húzott „második”, azaz t-től különböző érintő viszont a $(0, -1)$-től különböző pontban érinti k-t, kivéve, ha M (ill. M') éppen a $(0, -1)$ pont. Ekkor tekinthetjük „második” érintőnek is a t egyenest. Mivel ekkor z (vagy z') 0, (1) miatt a másik pont a $(2a, -1)$ pont, és a két érintő metszéspontja is ez a pont, ami a (7) egyenes metszéspontja t-vel. Ezt tehát a mértani helyhez tartozónak tekinthetjük. Ezzel egyszersmind a $z = 0$ és $z' = 0$ esetet is megtárgyaltuk.

Kizártuk végül korábban a $zz' = -1$ esetet. Ekkor pl. az M-ből húzott érintő (3) egyenletét 0-ra redukálva és z'^2-tel szorozva

$$2zz'^2 x + \left[(zz')^2 - z'^2\right] y - (zz')^2 - z'^2 = -2z'z - (z'^2 - 1)y - 1 - z'^2 = 0.$$

Ez párhuzamos a másik érintővel, melynek $(3a)$ egyenlete

$$2z'x + (z'^2 - 1)y - 1 - z'^2 = 0$$

alakban írható, de különbözik attól, tehát az ilyen z, z' értékpárhoz nem tartozik metszéspont.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy a keresett mértani hely az $x + ay - a = 0$ egyenesnek a körön kívül eső két félegyenese, ami nem más, mint az A-ból húzott érintő érintési pontját és a t érintési pontjával átellenes pontot összekötő húrnak a körön kívüli meghosszabbítása mindkét irányban.

Megjegyzések. 1. A $zz' = -1$ esetben (1)-ből $z(2a - z) = -1$, azaz $z^2 = 2az + 1$, és így az M-ből húzott érintő egyenlete ilyen alakban írható:

$$2zx + 2azy = 2az + 2, \quad x + ay = a + \frac{1}{z}.$$

Ez párhuzamos a mértani hellyel. A föntiek szerint ugyanez áll az M'-ből húzott érintőre is.

2. A két érintő egyenletéből még egyszerűbben jutunk a mértani hely egyenletéhez, ha a két érintő 0-ra redukált egyenletének különbségét képezzük és felhasználjuk (1)-et:

$$\begin{aligned} 0 &= 2zx + (z^2 - 1)y - 1 - z^2 - \left[2z'x + (z'^2 - 1)y - 1 - z'^2\right] = \\ &= 2(z - z')x + (z^2 - z'^2)y - (z^2 - z'^2) = \\ &= (z - z')(2x + (z + z')y - (z + z')\big] = 2(z - z')(x + ay - a). \end{aligned}$$

Ha az (x, y) pont rajta van mind a két érintőn, akkor kielégíti az utolsó egyenletet, és ha $z \neq z'$, akkor (7)-et is. Azt a z értéket, amely egy adott (x, y) ponthoz vezet, most is ugyanúgy kereshetjük meg, mint az előbb.

3. Sok versenyző nem kereste a számítások lehetőleg egyszerű útját, és így nem maradt kellő ideje terve teljes végrehajtására.

Bakos Tibor, Surányi János