1. feladat. *Legyenek a és b egynél kisebb pozitív számok. Bizonyítandó, hogy ekkor*

$$1+a+b>3\sqrt{ab}. \tag{1}$$

I. megoldás. Elegendő megmutatnunk, hogy (1) bal és jobb oldalának különbsége pozitív. A különbség így írható:

$$K=(a-2\sqrt{ab}+b)+(1-\sqrt{ab})=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2+(1-\sqrt{ab}).$$

Az első tag nem negatív, a második pedig pozitív, ugyanis a feltevés miatt ab és vele a négyzetgyöke is 1-nél kisebb. Így K valóban pozitív.

II. megoldás. A három nem negatív szám számtani és mértani közepe közti egyenlőtlenség[1] szerint

$$\frac{1+a+b}{3}>\sqrt[3]{ab},$$

mivel esetünkben nem lehet a három szám egyenlő. Másrészt megmutatjuk, hogy a jobb oldal nagyobb, mint $\sqrt{ab}$. Valóban

$$\sqrt[3]{ab}=\frac{\sqrt[3]{ab}}{\sqrt{ab}}\cdot\sqrt{ab}=(ab)^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{ab}=(ab)^{-\frac{1}{6}}\cdot\sqrt{ab}=\frac{1}{\sqrt[6]{ab}}\cdot\sqrt{ab}>\sqrt{ab},$$

mert az első tényező nevezőjében 1-nél kisebb szám áll.

2. feladat. *Bizonyítsuk be, hogy ha p és $8p-1$ törzsszám, akkor $8p+1$ összetett szám.*

I. megoldás. Az állítást fogalmazhatjuk szimmetrikusabban a következő módon: vagy p és $8p-1$ közül legalább az egyik összetett szám, vagy $8p+1$ összetett szám; még szimmetrikusabban: a p, $8p-1$ és $8p+1$ számok közül legalább az egyik összetett. Vizsgáljuk p-t a 3-mai való osztás maradéka szempontjából. Ekkor p vagy 1-et vagy 2-t ad maradékul, vagy osztható 3-mal, azaz vagy $3n+1$, vagy $3n+2$, vagy $3n$ alakú. Az első esetben $8p+1=24n+9=3(8n+3)$ összetett szám, mert $8n+3>1$; a másodikban $8p-1=24n+15=3(8n+5)$ osztható 3-mal és nagyobb mint 3; ha pedig $p=3n$, akkor 1-re összetett, $n=1$ ($p=3$) esetén pedig $8p+1=25$ összetett szám. Ezzel az állítást igazoltuk.

II. megoldás. $8p-1$, $8p$, $8p+1$ három egymás után következő természetes szám, ezért közülük egy (és csakis egy) osztható 3-mal. Ha p a 3-tól különböző prímszám és $8p-1$ is prímszám, akkor sem az első, sem a második szám nem osztható 3-mal, tehát $8p+1$-nek kell 3-mal oszthatónak lennie. Mivel pedig ez a szám nagyobb, mint 3, tehát összetett.

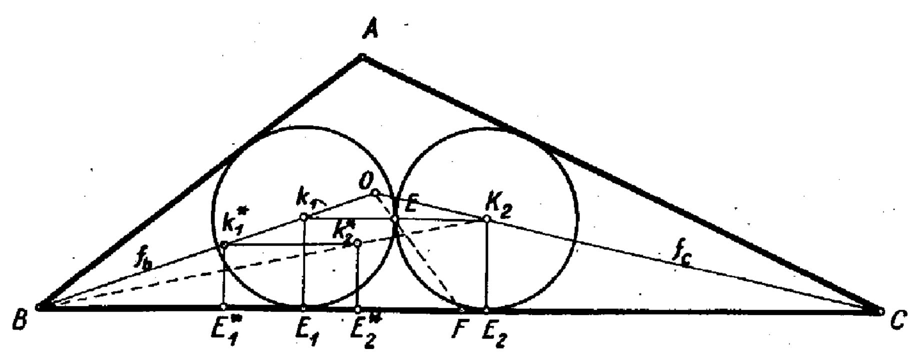
Ha $p=3$, akkor $8p-1=23$ prím, viszont $8p+1=25$ összetett.

Ezzel a feladat állítását igazoltuk.

3. feladat. *Adott egy háromszög. Szerkesszünk két egyenlő sugarú kört úgy, hogy mind a két kör érintse a háromszög két oldalát és ezenkívül egymást is érintsék.*

Megoldás. Az oldalak érintésén a szokásnak megfelelően az oldalszakaszok érintését értjük. Így a keresett körök a háromszög belsejében vannak. Nem érintheti két különböző kör, amelyek sugara egyenlő, ugyanazt a két oldalt, így az egyik oldalt mindkét kör érinti, a másik kettőt egy–egy kör.

Legyen a két kör középpontja K_1 és K_2, érintsék egymást az E pontban, érintse mindkettő az ABC háromszög BC oldalát, az első az E_1, a második az E_2 pontban. A háromszög B-ből, ill. C-ből induló szögfelezője legyen f_b, ill. f_c, ezen van a K_1, ill. K_2 középpont; a két szögfelező metszéspontja legyen O.



A követelmény alapján $K_1E_1\#K_2E_2$, a két szakasz merőleges BC-re és $K_1K_2=2K_1E=2K_1E_1$. Ezek szerint a $K_1E_1E_2K_2=T$ négyszög olyan a BCO háromszögbe írt téglalap, melyben a BC-n levő és a rá merőleges oldalak aránya $2:1$.

[1] Lásd pl. Kürschák–Hajós–NEUKOMM–Surányi: *Matematikai versenytételek I.,* Tankönyvkiadó, Budapest, 1955, 111. o.; vagy Hódi: *Szélső értékfeladatok elemi megoldása,* Tankönyvkiadó, Budapest, 1959, 20. o.

Ezek szerint T-t hasonlósági transzformációval szerkeszthetjük meg, pl. a következőképpen: Legyen K_1^* a BO szakasz egy tetszés szerinti pontja. Bocsássunk K_1^*-ból $K_1^*E_1^*$ merőlegest BC-re és mérjünk E_1^*-ból $2K_1^*E_1^*$ hosszúságú szakaszt – legyen ez $E_1^*E_2^*$ – a BC egyenesre úgy, hogy az $E_1^*E_2^*$ irány megegyezzék a BC iránnyal, végül egészítsük ki e pontokat egy $K_1^*E_1^*E_2^*K_2^*$ télalappá. Ekkor a BK_2^* egyenesnek CO-val való metszéspontja a keresett K_2, és az ezen át BC-vel párhuzamos egyenes BO-ból kimetszi K_1-et.

Valóban, a $K_2^*E_1^*K_1^*$ és $K_2E_1K_1$ derékszögű háromszögek hasonlók, mert a megfelelő csúcsaikat összekötő egyenesek B-ben metszik egymást és két pár megfelelő oldaluk párhuzamos és egyenlő irányú (a befogók), ennélfogva hasonló helyzetűek. Így

$$K_1K_2 : K_1E_1 = K_1^*K_2^* : K_1^*E_1^* = 2 : 1.$$

A K_1 és K_2 körül K_1E_1 sugárral írt körök érintik egymást és a BC oldalt, továbbá a BA, ill. CA oldalt is, mert ezek BC-vel tükrös párok f_b-re, ill. f_c-re nézve.

A BK_2^* egyenes minden háromszögben metszi CO-t, mert K_2^* az OBC konvex szögtérbe esik, tehát a szerkesztés egyértelműen végrehajtható.

BC helyére a BA, majd a CA oldalt választva a két kör közös érintője gyanánt – további két, a követelménynek megfelelő körpárt kapunk. Egyenlő szárú háromszögben a 6 kör közül kettő a szimmetria miatt nyilván azonos, azok, amelyek a két szárat érintik, amikor közös érintőnek az egyik szárat vesszük. Egyenlő oldalú háromszögből kiindulva pedig összesen 3 kör adódik.

Megjegyzések. 1. A hasonlósági transzformációt sok másféleképpen is felhasználták a versenyzők. Pl. a BC oldalt és egymást is érintő két egyenlő sugarú körhöz szerkesztettek AB-vel, ill. AC-vel párhuzamos érintőt úgy, hogy a keletkezett háromszög a köröket tartalmazza; vagy a BC szakaszra mint hosszabb oldalra kifelé szerkesztettek T-hez hasonló téglalapot, ennek BC-vel párhuzamos oldala f_b-vel és f_c-vel ad az OBC-hez hasonló helyzetű háromszöget stb. Ezek a háromszögek azután alkalmas nagyítással vagy kicsinyítéssel átvihetők az adott ábra megfelelő részébe.

2. Észrevehetjük azt is, hogy a K_1K_2 szakasz E felezőpontja a BCO háromszögnek BC-hez tartozó súlyvonalán van. Ezért az OF súlyvonal által kettéosztott BCO háromszögnek egyik felébe négyzetet szerkeszteni: szintén a kitűzött feladattal egyenértékű feladat.

Lőrincz Pál, Bakos Tibor, Surányi János