Az 1962. évi Országos Középiskolai Matematikai Tanulmányi Verseny I. fordulóján kitűzött feladatok megoldása

1. feladat. *Állapítsuk meg két szám negyedik hatványainak összegét, ha e számok összege* 10 *és szorzata* 4.

I. megoldás. Nem nehéz meghatározni a szóban forgó két számot – jelöljük ezeket x és y-nal –, majd negyedik hatványaik összegét. A feladat szerint

$$x + y = 10, \qquad xy = 4,$$

így x és y a

$$z^2 - 10z + 4 = 0$$

másodfokú egyenlet két gyöke, vagyis $+5+\sqrt{21}$ és $+5-\sqrt{21}$ (bármelyiket tekinthetjük x-nek, a másik az y). Negyedik hatványaik összege

$$(5+\sqrt{21})^4 + (5-\sqrt{21})^4 = \left((5+\sqrt{21})^2\right)^2 + \left((5-\sqrt{21})^2\right)^2 =$$
$$= (46+10\sqrt{21})^2 + (46-10\sqrt{21})^2 = 2(46^2 + 10^2 \cdot 21) = 8432.$$

II. megoldás. A feladatot egyszerűbben is megoldhatjuk, anélkül, hogy a két számot kiszámítanánk. Két szám negyedik hatványainak az összegét ugyanis általában kifejezhetjük a két szám összegének – jelöljük p-vel – és szorzatának – jelöljük q-val – a segítségével:

$$x^4 + y^4 = (x^2+y^2)^2 - 2x^2y^2 = \left((x+y)^2 - 2xy\right)^2 - 2(xy)^2 =$$
$$= (p^2 - 2q)^2 - 2q^2 = p^4 - 4p^2q + 2q^2.$$

A $p = 10$ és $q = 4$ adatok behelyettesítésével:

$$x^4 + y^4 = 8432.$$

Megjegyzések. 1. A két szám negyedik hatványainak összegét az összegük és szorzatuk segítségével többféleképpen is felírhatjuk, pl.

$$(x+y)^4 = x^4 + y^4 + 4x^3y + 4xy^3 + 6x^2y^2 = x^4 + y^4 + 4xy(x^2+y^2) +$$
$$+6(xy)^2 = x^4 + y^4 + 4xy\left((x+y)^2 - 2xy\right) + 6(xy)^2.$$

Innen $x^4 + y^4$-t kifejezve rendezés után ismét a fönti kifejezést nyerjük.

2. Az $x^4 + y^4$ polinom nem változik meg, ha benne x-et és y-t felcseréljük, ugyanez áll az $x + y$ és xy polinomokra is. Általában az x_1, x_2, …, x_n változók egy polinomját *szimmetrikus polinomnak* nevezzük, ha a változói helyébe ugyanezeket a változókat egy tetszés szerinti más sorrendben írva be, a polinom nem változik meg (legfeljebb a tagok sorrendje változik). Ha $k \le n$, az x_1, x_2, …, x_n változókból képezhető összes k-tényezős szorzatok összegét a változók (k-adfokú) *elemi szimmetrikus polinom*jának nevezzük. Mármost az algebra egy nevezetes tétele szerint *minden szimmetrikus polinom kifejezhető a változói elemi szimmetrikus polinomjainak a polinomjaként. Ez a kifejezés* (összevont alakban) *a tagok sorrendjétől eltekintve egyértelmű.*

Ezt a kifejezést állítottuk elő a II. megoldásban, és nem véletlen, hogy ugyanarra az eredményre vezet az 1. megjegyzés átalakítása is.

2. feladat. *Egy természetes szám hatodik hatványának számjegyei nagyság szerint rendezve a következők:*

$$0,\ 2,\ 3,\ 4,\ 4,\ 7,\ 8,\ 8,\ 9.$$

Mi ez a szám?

Megoldás. Ha létezik a feltételnek megfelelő x szám, akkor az kétjegyű, mert a 7-jegyű 10^6 számnál nagyobb, de a 13-jegyű 100^6-nál kisebb a hatodik hatványa. Szűkebb korlátokat adnak x^6-ra az adott számjegyekkel írható legkisebb és legnagyobb szám. Mivel 0 az első helyen nem állhat, így azt nyerjük, hogy

$$203\,447\,889 \le x^6 \le 988\,744\,320.$$

A felső korlátot kissé növelve

$$x^6 < 10^9, \quad x^2 < 10^3, \quad x < \sqrt{1000} < 32.$$

Az alsó korlát minden esetre lényegesen nagyobb $20^6 (= 64\,000\,000)$-nál, viszont kisebb, mint $25^6 = (625)^3 > (600)^3 = 216\,000\,000$. Továbbmenve $24^6 = \left((3\cdot 8)^3\right)^2 = (27\cdot 512)^2 = 13\,824^2 < 14\,000^2 = 196\,000\,000$ már kisebb, mint az alsó korlát. Így a keresett szám 24 és 32 közé eshet csak (a határokat nem engedve meg).[1]

[1] Az x^6-ra nyert egyenlőtlenségpárból leggyorsabban logaritmus segítségével kaphatunk x-re korlátokat. Mivel kétjegyű korlátot keresünk, elég négy (sőt akár 3) értékes jegyet tartani meg a 9-jegyű számokból, persze az alsó korlátot közben lefelé, a felsőt fölfelé kerekítve.

Vegyük észre, hogy az x^6-ra megadott számjegyek összege osztható 3-mal, vagyis x^6 is osztható 3-mal. Ez csak úgy lehet, ha maga x is 3-mal osztható (3-mal nem osztható szám semmilyen hatványa sem osztható 3-mal). A 24-nél nagyobb és 32-nél kisebb természetes számok közül csak a 27 és a 30 osztható 3-mal, de 30 nem lehet a feladat megoldása, mert hatodik hatványa 6 db 0-ra végződik. Viszont $27^6 = 387\,420\,489$, a jegyek megegyeznek az adottakkal, tehát $x = 27$.

Megjegyzések. 1. A 3-mal való oszthatóság helyett a feladatnak megfelelő számot végződése alapján is kiválaszthatjuk. Ha ugyanis x végződése rendre

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,$$

akkor x^6 végződése rendre

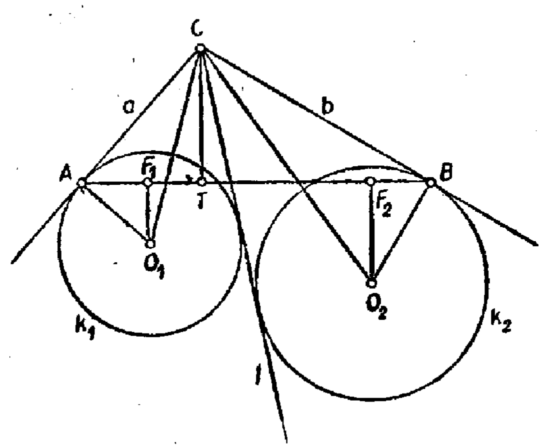
$$0,\ 1,\ 4,\ 9,\ 6,\ 5,\ 6,\ 9,\ 4,\ 1.$$

Mivel az adott számjegyek között 1, 5 és 6 nem szerepel, a már kiszámított korlátok közti számok közül x csak 27, 28 vagy 30 lehet. 30 a már említett ok miatt nem felel meg, 28^6 jegyei nem a megadottak, 27 viszont megfelel.

2. Több versenyző x^6-nak 9-cel való oszthatóságából x-nek 9-cel való oszthatóságára következtetett, és a kiszámított korlátok között egyedüli lehetőségként a 27-et jelölte meg. Ez a következtetés hamis, mert pl. 3^6 osztható 9-cel, de maga az alap: 3 nem.

3. feladat. *Jelölje f az „a” és b félegyenesek alkotta szög felezőjét. Egy az „a” és f félegyeneseket érintő k_1 kör „a”-t az A pontban, egy a b és f félegyeneseket érintő k_2 kör b-t a B pontban érinti. Igazoljuk, hogy az AB egyenes a k_1 és k_2 körökből egyenlő húrokat metsz ki.*

Megoldás. Az a és b félegyenesek közös kezdőpontját jelöljük C-vel, a két kör középpontját O_1-gyel és O_2-vel, e három pont vetületét az AB egyenesen T-vel, F_1-gyel és F_2-vel. A vizsgálandó húrok egyenlősége helyett nyilván elegendő a felüknek, AF_1-nek és BF_2-nek az egyenlőségét kimutatni.



1. ábra

Ha O_1 nem esik az AB egyenesre (azaz $BAC\sphericalangle \neq 90^\circ$), akkor az AO_1F_1 és a CAT derékszögű háromszögekben az A-nál, illetőleg C-nél levő szögek merőleges szárú hegyes szögek, ezért egyenlők, s így a két háromszög hasonló, tehát megfelelő oldalaik aránya egyenlő:

$$AF_1 : AO_1 = CT : CA,$$

ebből

$$AF_1 = \frac{AO_1}{CA} \cdot CT. \tag{1}$$

Ugyanígy a BO_2F_2 és CBT háromszögek hasonlósága alapján (hacsak $ABC\sphericalangle \neq 90^\circ$)

$$BF_2 = \frac{BO_2}{CB} \cdot CT. \tag{2}$$

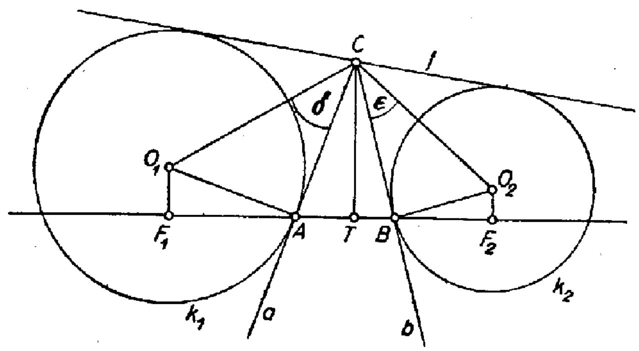
Az állítás igazolásához most már elegendő az AO_1/CA és BO_2/CB arányok egyenlőségét belátnunk. Ez viszont fennáll, mert tagjaik a CAO_1 és a CBO_2 derékszögű háromszögek befogói, e háromszögek pedig hasonlók, mert C-nél levő szögük az a és b félegyenesek hajlásszögének negyedrésze.

Az ábrán az ABC háromszög A-nál és B-nél levő szöge hegyesszög, meggondolásunk azonban akkor is helyes marad, ha valamelyik (pl. az A-nál levő) szög tompaszög.

Abban az esetben viszont, ha pl. $CAO_1\sphericalangle \neq 90°$, az AB egyenes átmegy O_1-en, a T pont egybeesik A-val, így

$$AF_1 = AO_1 = \frac{AO_1}{CA} \cdot CA = \frac{AO_1}{CA} \cdot CT,$$

tehát az (1) összefüggés ebben az esetben is fennáll. A bizonyítás további része változatlanul alkalmazható ebben az esetben is.



2. ábra

Megjegyzés. Az (1) és (2) összefüggések levezetésében nem használtuk ki, hogy f szögfelező; ezek még akkor is fennállnak, ha f az a és b határolta konkáv szögtérben van. (Ekkor a két kör érintési pontja f-en közrefogja C-t.) AO_1/AC, ill. BO_2/BC általában azon szögek felének a tangense, amelyet f-nek k_1-et érintő félegyenese a-val, ill. k_2-t érintő félegyenese b-vel zár be. Ezeket a félszögeket δ-val, ill. ε-nal jelölve (1) és (2) alapján a két körből kimetszett húrok hosszának arányára (ismét a húrok felével számolva)

$$\frac{AF_1}{BF_2} = \frac{\operatorname{tg}\,\delta}{\operatorname{tg}\,\varepsilon}.$$

Lukács Ottó, Scharnitzky Viktor, Surányi János