

Gyakran olvassuk, hogy egy üzemben, építkezésnél vagy közlekedési vállalatnál a munka jobb megszervezése, felesleges szállítások megszüntetése útján minden befektetés nélkül megtakarítást értek el, néha nem is kicsit. Nyilvánvaló, hogy ezeket gondos vizsgálatok és számítások előzték meg. Felvetődik a kérdés, milyen matematikai módszerek segítségével lehet ilyen bonyolult kérdéseket egyáltalában matematikai formába önteni, majd megoldani? A legegyszerűbb, és éppen ezért a legelterjedtebben használt matematikai módszer, amely tervező és közgazdász szakemberek rendelkezésére áll ilyen problémák megoldására, a *lineáris programozás*. Ennek a köréből mutatunk be egy példát, amely középiskolai ismeretekkel is megoldható.

**1. Egy gyakorlati feladat.** Egy üzemrész kétféle terméket állít elő. A termékek 1–1 darabjának előállításához szükséges munkaműveletek:

- az I. terméknél: 2 perc marás, 2 perc csiszolás, 5 perc festés,
- a II. terméknél: 2 perc préselés, 1 perc csiszolás, 5 perc festés.

A szükséges gépek egy műszak alatt az alábbi időtartamokra vehetők igénybe:

a marógép. . . . .	90 percig,
a présgép. . . . .	80 percig,
a csiszológép. . . . .	100 percig,
a festőműhely. . . . .	300 percig.

A feltételek ilyen megadása általában még a munka sokféle beosztását teszi lehetővé. A feladat általában az, hogy valamilyen célkitűzés (pl. egy időszak alatt gyártott érték, elért nyereség stb.) szempontjából a legkedvezőbb beosztást, más szóval munkaprogramot találjuk meg. Ehhez azonban hasznos, ha ismerjük az összes lehetséges munkaprogramot. Ezzel a feladattal foglalkozunk először. Feltételezzük, hogy a felhasználandó anyagok a szükséges mennyiségben állnak rendelkezésre.

Meg kell keresnünk mindenek előtt azokat a matematikai összefüggéseket, amelyek együttesen pontosan leírják az adott feltételeket. (Ezeket szokás a probléma matematikai modelljének nevezni.)

Készüljön egy műszak alatt az I. termékből  $x$  darab, a II-ből  $y$  darab. Sorra véve a szükséges munkaműveleteket, marást csak az I. munkadarabon kell végezni, éspedig összesen  $2x$  percig. A marógép kapacitását tekintetbe véve nyerjük, hogy

$$2x \leq 90.$$

Hasonlóan adódik, sorra véve a további gépek kapacitását:

présgép:	$2y \leq 80,$
csiszológép:	$2x + y \leq 100,$
festőműhely:	$5x + 5y \leq 300.$

A feltételek matematikai modellje tehát egy kétismeretlenes egyenlőtlenségrendszer.

Az üzemrész annyiféle termelési programot készíthet a két termék gyártására, ahány e négy korlátnak, illetve egyenlőtlenségnek eleget tevő számpárt tudunk az  $x$  és  $y$  lehetséges értékeiből összeállítani. Magától értetődik, hogy  $x$  és  $y$  pozitívok. Ez két újabb egyenlőtlenséget jelent:

$$x > 0, \quad y > 0,$$

és így egyenlőtlenségrendszerünk végül is 6 egyenlőtlenségből áll.

Az egyenlőtlenségrendszert derékszögű koordináta-rendszerben ábrázolva, grafikus úton fogjuk megoldani.

**2. Kétismeretlenes elsőfokú egyenlőtlenség rendszerek grafikus megoldása.** Az  $x > 0$  egyenlőtlenség megoldásait azok a pontok ábrázolják, amelyeknek az abszcisszája pozitív, ordinátája tetszőleges, vagyis az  $Y$ -tengelytől (az  $x = 0$  egyenlettel jellemzett egyenestől) jobbra levő pontok (félsík). Hasonlóan az  $y > 0$  egyenlőtlenségnek eleget tevő pontok az  $X$ -tengely (az  $y = 0$  egyenes) felett helyezkednek el. A két feltételnek egyszerre az  $X$ - és  $Y$ -tengely pozitív fele által határolt síkrész (az első síknegyed) pontjai tesznek eleget.

Hasonlóan a feladat első egyenlőtlenségének, amely

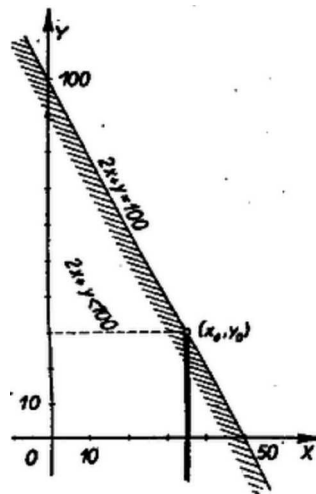
$$x \leq 45$$

alakban írható, az  $Y$ -tengellyel párhuzamos  $x = 45$  egyenestől „balra” levő félsík pontjai felelnek meg, de most hozzászámítva a határegyenes is, annak megfelelően, hogy a kisebb jel mellett most az egyenlőség is meg van engedve.

A második egyenlőtlenséget

$$Y \leq 40$$

alakban írva, ennek az  $X$ -tengellyel párhuzamos  $y = 40$  egyenes és az alatta levő félsík pontjai tesznek eleget.



1. ábra

Vizsgáljuk most a csiszológép szolgáltatata

$$(1) \quad 2x + y \leq 100$$

egyenlőtlenséget. Az egyenlőség jelének ismét a

$$(2) \quad 2x + y = 100$$

egyenes pontjai felelnek meg (1. ábra). Válasszunk ezen egy pontot, pl.  $x_0 = 35$  abszcisszával, így ordinátája  $y_0 = 100 - 2x_0 = 30$ . Ekkor az (1) egyenlőtlenségnek az  $x_0$  abszcisszájú pontok közül azok tesznek eleget, amelyeknek az ordinátáira

$$y \leq 100 - 2x_0 = y_0 = 30.$$

Az  $x_0 = 35$  egyenes pontjai közül az (1) egyenlőtlenségnek tehát a (2) egyenes alatti félegyenesen levők felelnek meg, és ugyanez áll minden más  $x_0$ , értékre is. Az (1) egyenlőtlenségnek tehát a (2) egyenes és az alatta levő felsík pontjainak koordinátái tesznek eleget. (Ugyanígy  $y_0$  értékét rögzítve és a megfelelő  $x$  értékeket keresve fogalmazhattuk volna állításunkat úgy is, hogy a (2) egyenes és a tőle balra eső felsík pontjai ábrázolják (1) megoldásait.)

A negyedik egyenlőtlenség így írható:

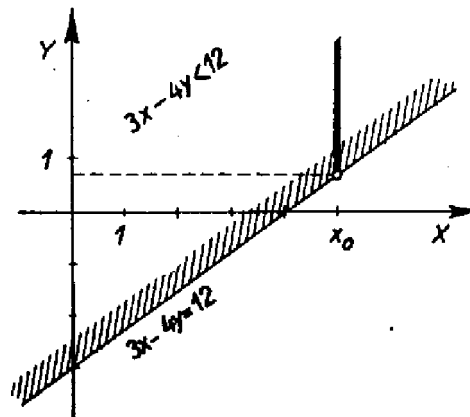
$$x + y \leq 60, \quad y \leq 60 - x.$$

Az előbbihez hasonlóan ennek az

$$x + y = 60$$

egyenes és az alatta levő felsík pontjai tesznek eleget.

Ezzel a feladatban szereplő egyes egyenlőtlenségek geometriai tartalmát külön-külön megállapítottuk. Mielőtt eredményeinket összegezzük, nézzünk még egy példát kétismeretlenes elsőfokú egyenlőtlenség ábrázolására, hogy a negatív együttható szerepét is lássuk.



2. ábra

Keressük pl. a

$$(3) \quad 3x - 4y < 12$$

egyenlőtlenség megoldásait ábrázoló pontokat. Az előzőkhöz hasonlóan járva el a

$$(4) \quad 3x - 4y = 12$$

egyenesen (2. ábra) pl. az  $x_0 = 5$  abszcisszájú pont ordinátája  $y_0 = \frac{12 - 4 \cdot 5}{-4} = \frac{4}{3}$ . Az egyenlőtlenségnek eleget tevő  $x_0$  abszcisszájú pontokra

$$3x_0 - 4y < 12, \quad -4y < 12 - 3x_0 = -3.$$

Most  $-4$ -gyel kellene elosztani az egyenlőtlenséget. Szorozzunk először  $-1$ -gyel, utána a  $4$ -gyel való osztás már nem okoz problémát. Az egyenlőtlenség teljesülése azt jelenti, hogy  $-4y$  negatív és abszolút értéke (tehát  $4y$ ) nagyobb mint  $3$ :

$$4y > 3.$$

Amit itt láttunk, minden esetre érvényes: *ha egy egyenlőtlenséget  $-1$ -gyel, általában egy negatív számmal megszorozunk vagy elosztunk, akkor az egyenlőtlenség jele az ellenkezővel helyettesítendő.*<sup>1</sup>

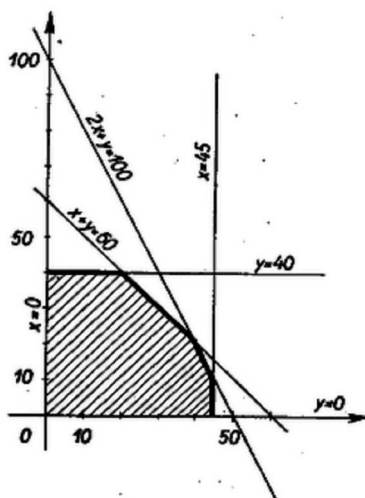
A (3)-nak eleget tevő  $x_0$  abszcisszájú pontokra így  $y > 3/4$  adódik, vagyis az  $x_0 = 5$  egyenesnek a (4) egyenes fölötti része, és ismét ugyanez áll minden más  $x_0$  értékre is. A (3) egyenlőtlenséget tehát a (4) egyenes fölötti felsík pontjainak a koordinátái elégítik ki, az egyenes pontjait ezúttal már nem véve hozzá, mivel (3)-ban az egyenlőség már nincs megengedve.

A fentiekben látott módon minden kétismeretlenes elsőfokú egyenlőtlenség geometriai jelentését meg tudjuk állapítani. Térjünk ezután vissza eredeti feladatunk megoldásához.

### 3. A célszerű munkaprogramok megkeresése. Az

$$\begin{aligned} x &> 0, & y &> 0, \\ x &\leq 45, & y &\leq 40, \\ 2x + y &\leq 100, & x + y &\leq 60 \end{aligned}$$

egyenlőtlenségek mindegyikének azon pontok koordinátái tesznek eleget, amely pontok mindegyik egyenlőtlenségnek megfelelő felsíkon rajta vannak, vagyis a felsíkok közös részeinek a pontjai. Ez a közös rész egy konvex hatszög (3. ábra), jelöljük  $H$ -val.  $H$  minden pontja egy lehetséges munkaprogramot képvisel, azaz végtelen sokféleképpen lehet az adott határok között a gépeket üzemeltetni (vagy esetleg állni hagyni). Mivel azonban példánkban a termékek előállításai ideje csekély, nem érdemes félig kész munkadarabokat az egyik műszakból a másikba átvinni. Ezért indokolt, hogy csak a pozitív egész megoldásokat keressük.



3. ábra

Ezzel sem válik azonban a munkaprogram egyértelművé, mert  $H$ -ban és határának a tengelydaraboktól különböző részén több egész koordinátájú pont van. A tulajdonképpeni kérdés éppen az, hogy e sokféle program közül melyik lesz a legjobb, az ún. *optimális program*? Ennek eldöntése csak akkor lehetséges, ha megadjuk, hogy milyen szempontból keressük az optimális programot. Lehet, hogy – például – a maximális *számú* terméket biztosító programot tekintjük a legjobbnak, vagy a maximális *termelési érték* elérése a célunk, vagy maximális *nyereségre* törekszünk, stb. Erre 3 példát mutatunk be. Tegyük fel, hogy

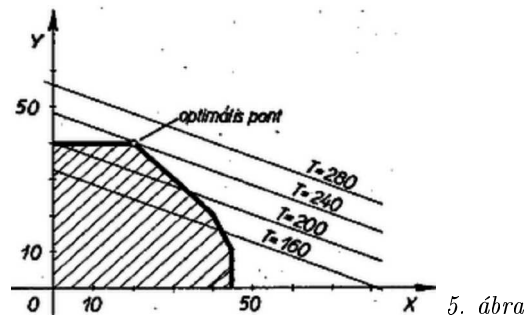
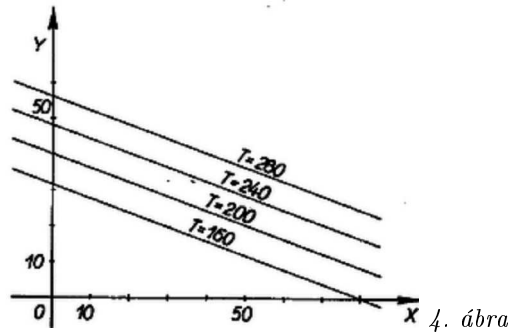
<sup>1</sup> Az olvasóra bízunk annak átgondolását, hogy ez akkor is helyes, ha a nagyobb oldalon pozitív szám áll. (A kisebb oldalon ez esetben állhat pozitív szám is, negatív is.)

	az I. termék	a II. termék
ára darabonként . . . . .	2 Ft,	5 Ft,
tiszta nyeresége darabonként	0,72 Ft,	0,35 Ft.

a) Vizsgáljuk meg először azt, milyen program mellett lesz a *termelési érték* maximális. A mondott feltételek mellett egy bizonyos  $T$  termelési érték a

$$T = 2x + 5y$$

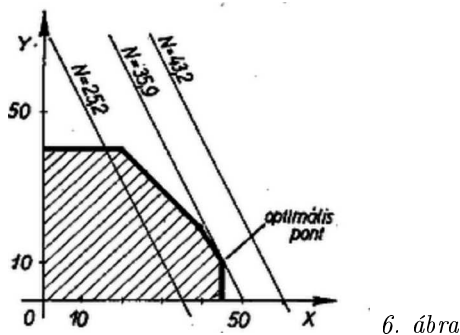
összefüggés alapján számítható ki. Egy adott  $T$  érték sokféle  $x$  és  $y$  darabszám mellett állhat elő, és az  $(x, y)$  pontok a  $2x + 5y = T$  egyenesen helyezkednek el. Különböző  $T$  értékeket választva egymással párhuzamos egyeneseket kapunk. A 4. ábrán a 160, 200, 240 és 280 Ft termelési értékhez tartozó egyeneseket rajzoltuk meg.

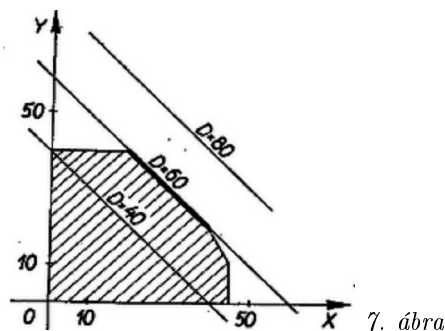


A 4. ábrát  $H$ -ra ráhelyezve (5. ábra) látszik, hogy a 200 Ft érték sokféle programmal is elérhető, ugyanis a  $T = 200$  értékhez tartozó egyenesnek egy egész szakasza esik bele  $H$ -ba. A 280 Ft-os érték viszont sehogy sem érhető el, mert a megfelelő egyenesnek nincs közös pontja  $H$ -val. Az optimális megoldást szolgáltató egyenesnek e két egyenes közé kell esnie. A vonalzó párhuzamos eltolásával könnyen megállapítható, hogy a  $T = 240$  Ft termelési értékhez tartozó

$$2x + 5y = 240$$

egyenes szolgáltatja az optimális megoldást, mert ez a legnagyobb  $T$ , amelyhez tartozó egyenesnek van közös pontja  $H$ -val. És mivel ennek az egyenesnek  $H$ -val csak egy közös pontja van, a  $(20; 40)$  pont, ezért csak egyetlen optimális megoldás van: az üzemrész az adott feltételek mellett egy műszak alatt akkor állítja elő a legnagyobb termelési értéket (240 Ft-ot), ha az I. termékből 20, a II-ből pedig 40 darabot készít.





b) Milyen programot kell készítenünk, ha a maximális *nyereség* a cél? Egy adott  $N$  nyereség olyan  $x$  és  $y$  termék számok mellett érhető el, amelyekre

$$0,72x + 0,35y = N.$$

Néhány  $N$  értékhez tartozó egyenest és az egyetlen optimális pontot szolgáltató, az  $N = 35,90$ -hez tartozó egyenest a 6. ábrán tüntettük fel. Az üzembrész tehát akkor hozza a legnagyobb hasznot, ha az I. termékből 45, a II.-ből 10 darabot gyárt műszakonként.

c) Keressük meg azt a programot, amely a maximális darabszámot biztosítja. Az előzőekhez hasonlóan most a különböző  $D$  darabszámokhoz tartozó

$$x + y = D$$

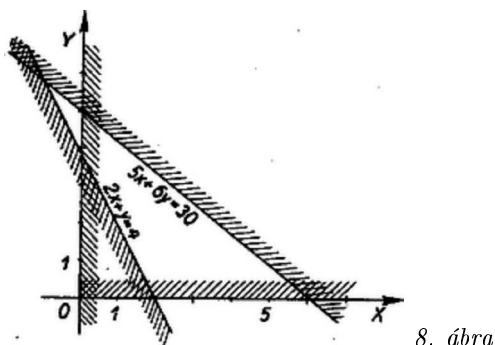
párhuzamos egyeneseket kell hozzárajzolnunk a 3. ábrához. A 7. ábrán a  $D = 40$ ,  $D = 60$  és a  $D = 80$  értékhez tartozó egyeneseket látjuk. Itt – az eddigi esetektől eltérően – az optimális megoldást szolgáltató  $D = 60$  értékhez tartozó egyenesnek és  $H$ -nak több közös pontja van: a vastagon kihúzott szakasz, mert a darabszámra jellemző egyenesek párhuzamosak  $H$  egyik határoló egyenesével. Ez azt jelenti, hogy a gépek kapacitása egy műszakban maximálisan 60 db termék elkészítését teszi lehetővé, de ez többféle módon is lehetséges: mindkét termékből legalább 20 darabot kell, és legfeljebb 40 darabot lehet gyártani, mert a vastagon kihúzott szakasz a  $(20; 40)$  ponttól a  $(40; 20)$  pontig terjed.

Foglaljuk táblázatba eddigi eredményeinket:

Milyen szempontból keresünk optimális programot	I. termék gyártandó darabszáma	II. termék gyártandó darabszáma
Maximális érték .....	20	40
Maximális nyereség .....	45	10
Maximális darabszám .....	20–40	40–20

A tervezés során természetesen sok más szempont is felmerülhet (önköltség, energiafelhasználás stb.). Ezek alapján tovább lehetne bővíteni ezt a táblázatot. De már az eddigi eredmények is választ adnak néhány, a termelés megszervezése szempontjából fontos kérdésre. A táblázat megmutatja a különféle optimális pontokat – ha ilyenek vannak –, vagy optimális határokat – példánkban a c) eset –, amelyeken belül, esetleg még más szempontokat is figyelembe véve, a szervezők a legmegfelelőbb programot választhatják ki. Esetünkben pl. a maximális termelési értéket és a maximális darabszámot *egyszerre* is elérheti az üzembrész, ha az I. termékből 20, a II.-ből pedig 40 darabot termel.

Az ábrákról az is megállapítható, hogy adott esetben meddig lehet észszerű engedményt tenni valamely szempont szerinti optimális program rovására. Leolvasható pl., hogy ha a maximális termelési érték elérése a cél, akkor csak a prégép és a festőműhely kapacitását használjuk ki teljesen, mert ez az optimális pont éppen a prégép és a festőműhely miatti korlátozást ábrázoló egyenesek metszéspontja. Ekkor a többi gép bizonyos ideig állni kénytelen. Viszont ha a maximális nyereség elérésére törekszünk, a marógép és a csiszológép dolgozik teljes kapacitással és a többi számára tervezhetünk más munkát is.



4. *Megjegyzés.* A tárgyalt feladatban láttuk, hogy bizonyos szempont szerint (termelési érték, nyereség) egyetlen optimális program létezik, más szempont szerint (darabszám) több (végtelen sok) optimális program is lehetséges. Előfordulhat azonban természetesen az az eset is, hogy a feladat egyáltalában nem oldható meg, mert a feltételei egyenlőtlenségek ellentmondanak egymásnak. Ilyen pl. az alábbi egyenlőtlenségrendszer:

$$\begin{aligned} 5x + 6y &> 30, \\ 2x + y &< 4, \\ x &\geq 0, \\ y &\geq 0. \end{aligned}$$

Lásd a 8. ábrát.

5. *A lineáris programozás feladata általában.* A fentiekben egy nagyon egyszerű példával igyekeztünk illusztrálni a lineáris programozást. Általában egy üzem munkáját nem két, hanem sokkal több adattal lehet leírni. Ezek megválasztására a termelés külső feltételei (a fenti példában a gépek kapacitása) általában csak tág feltételeket szabnak. A feladat ezek közt a feltételek közt olyan munkaprogramot találni, amely mellett valamilyen, a termelést leíró adatoktól függő mennyiség a lehető legnagyobb vagy a lehető legkisebb lesz.

A termelési feltételek adta korlátozásokat általában egyenlőtlenségekkel lehet leírni, és azt kell megállapítanunk, hogy egy további megadott függvény az egyenlőtlenségrendszert kielégítő értékrendszerek közül melyikre vagy melyikre veszi fel a legnagyobb, vagy melyikre a legkisebb értéket.

A tárgyalt példát két körülmény tette egyszerűvé, az, hogy a változóknak csak elsőfokú kifejezései léptek fel és hogy csak két változó szerepelt.

Az, hogy csak elsőfokú (latin szakkifejezéssel lineáris) kifejezések lépnek fel, azt eredményezi, hogy számítások közben csak a négy alapműveletre van szükség. Az ilyen számítások igen könnyen végezhetők gépekkel. Ezeknek a fontosságát növeli az is, hogy a gyakorlati problémáknál igen gyakran lépnek fel egyenes arányosságban levő mennyiségek (tehát elsőfokú kifejezéssel jellemezhető összefüggések), vagy legalábbis jó közelítésben arányosnak tekinthetők. Az ilyen esetekkel foglalkozik a lineáris programozás.

Általánosan tehát így fogalmazható a probléma: valamilyen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  mennyiségre teljesülnie kell bizonyos<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\leq b_2, \\ \dots &\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n &\leq b_k \end{aligned}$$

egyenlőtlenségeknek, és kérdezzük, hogy ezen feltételek mellett egy

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

kifejezés mely  $x_1, x_2, \dots, x_n$  értékrendszerre veszi fel a maximális értékét és mi ez a maximális érték.

A két változó annyiban jelentett könnyebbséget, hogy a matematikai feladatot geometriailag tudtuk szemléltetni, és egyenesek húzásával, főleg pedig egyenesek párhuzamos elmozgatásával megoldani. Ez a lehetőség elvben 3 változó esetén a térben még rendelkezésre áll (bár gyakorlatban nehéz megvalósítani), több változó esetén azonban a geometriai szemléltetést nem tudjuk felhasználni. Ilyen esetben – és a gyakorlatban ez fordul elő a legtöbbször – algebrai jellegű megoldást kell keresnünk. Többféle ilyen megoldási módszer is ismeretes. Bár ezek elvileg mind elemiek, azonban nagy mennyiségű számítást igényelnek.<sup>3</sup>

6. *A szállítási probléma.* A lineáris programozás körébe tartozó egyik jellegzetes feladattípus az ún. szállítási probléma. Bizonyos anyagot több ismert telephely használ fel és több gyár állít elő (pl. téglát építkezéshez). Ismerjük az egyes gyárak termelési kapacitását, az egyes telephelyek igényét, és ismerjük a szállítási költségeket, amelyek különböző gyárak és telephelyek között különbözők lehetnek (pl. más szállítási eszközök, terepviszonyok, egyéb miatt). Találomra kialakult megoldásnál előfordul az is, hogy két távoli felvevőhely kölcsönösen a másikhoz közeli gyárból szállít (keresztszállítás). Az ilyeneket könnyű megszüntetni, a leggazdaságosabb megoldást azonban találgatás útján nem lehet megtalálni. A lineáris programozás módszereivel megkereshető a szállítások olyan elosztása, amely mellett a szállítási költség minimális. Ha a felvevőhelyek igényének összege egyenlő a gyárak együttes termelésével, akkor a feltételeket – az előző feladattól eltérően – nem egyenlőtlenségek, hanem egyenletek segítségével írhatjuk fel. Ezen feltételei egyenletrendszer általában több ismeretlent tartalmaz, mint egyenletet, ennek teljesülése mellett keressük a költségek minimumát. Az optimális megoldás meghatározása és gyakorlati megvalósítása ilyen feladatoknál néhány esetben váratlanul nagy mérvű megtakarítást tett lehetővé.

<sup>2</sup>Célszerű volt két indexes jelölést használni ( $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{ij}$ , olv. „á egy, egy”, „á egy, kettő”, általában „á i, j”). Az első index jelöli, hogy hányadik egyenlőtlenségről van szó, a második, hogy abban hányadik ismeretlen együtthatójáról.

<sup>3</sup>Az érdeklődő olvasó részletes ismertetésüket megtalálhatja KREKŐ BÉLA *Lineáris programozás* című könyvében (Budapest, Közgazdasági és Jogi Kiadó, 1962).

**7. Történeti megjegyzések.** Közgazdasági problémák megoldására matematikai módszerek alkalmazását már két évszázaddal ezelőtt elkezdték, de az első, gyakorlatilag is jól használható eredmények csak a XX. század első harmadában váltak ismeretessé. Ezek W. W. LEONTIFF orosz, valamint NEUMANN JÁNOS magyar származású amerikai matematikusok nevéhez fűződnek.

Az egyre magasabb fokú szervezettséget követelő ipari fejlődés nyomán mind a Szovjetunióban, mind a kapitalista államokban (főleg az Egyesült Államokban) a második világháború előtt és alatt csaknem egy időben jelentek meg a lineáris programozás alkalmazásait bemutató, majd a második világháború után a lineáris programozás elméletét megalapozó és továbbfejlesztő munkák.

Az első olyan mű, amely lineáris programozással old meg feladatokat, L. V. KANTOROVICS szovjet matematikus 1939-ben megjelent cikke. Vele csaknem egy időben, 1941-ben F. L. HITCHOOK amerikai matematikus közölt egy megoldást a szállítási problémára. Megemlítjük, hogy a szállítási probléma egy másik megoldása, az ún. „*magyar módszer*” KÖNIG DÉNES, EGERVÁRY JENŐ magyar és H. W. KUHN amerikai matematikusok nevéhez fűződik.

A lineáris programozási feladatok megoldására szolgáló egy általános módszer, az ún. *szimplex módszer*, 1947-ben alakult ki G. B. DANTZIG amerikai matematikus munkássága nyomán.

Azóta már több olyan módszert is kidolgoztak, amely nem csupa elsőfokú összefüggés esetén is alkalmazható.

**Scharnitzky Viktor, Surányi János**