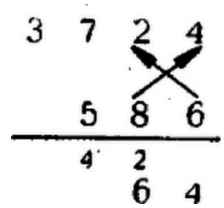
Számoljunk ügyesen![1]

Régóta ismeretes, hogy két szám szorzatát kiszámíthatjuk csak a végeredményt leírva, a részletszorzatok kiszámítása nélkül is. Ezt egy példán illusztráljuk, azonban itt természetesen a végeredményen kívül a fejben végezhető mellékszámítások egy részét is leírjuk. Számítsuk ki a $3724 \cdot 586$ szorzatot.

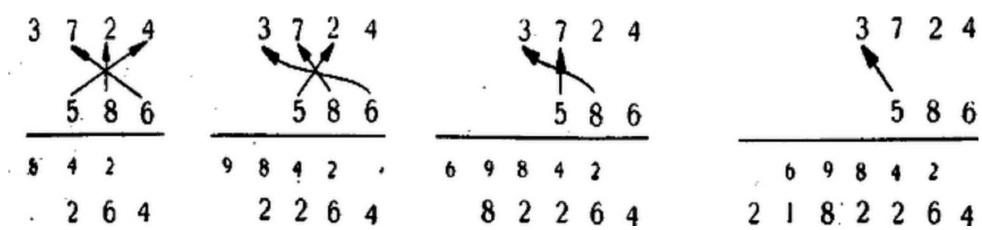
A szorzat utolsó (egyes helyértékű) jegyét a tényezők egyes helyértékű jegyeinek szorzatából kapjuk: $6 \cdot 4 = 24$. A 4 a keresett utolsó jegy, és maradt két tízes.

$$\begin{array}{cccc}
3 & 7 & 2 & 4 \\
 & & & \uparrow \\
 & 5 & 8 & 6 \\
\hline
 & & 2 & \\
 & & & 4
\end{array}$$

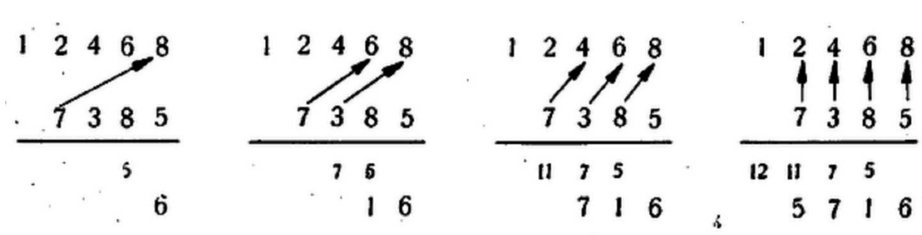
(A nyíl az összeszorzott jegyeket köti össze. Az átviendő tízeseket az eredmény tízes jegyének helye fölött tüntettük fel, hasonlóan tüntetjük fel a további lépéseket is.) A tízesek az előbbi 2-n kívül a szorzó utolsó és a szorzandó utolsó előtti jegye szorzatának, továbbá a szorzó utolsó előtti és a szorzandó utolsó jegye szorzatának utolsó jegyeiből adódnak: $2 + 8 \cdot 4 + 6 \cdot 2 = 46$. A második jegy 6, és maradt 4 százas.



Hasonlóan számíthatjuk a további jegyeket is, ezek számítását külön–külön lépésekben tüntetjük fel.



Könnyíthetjük a számítást azzal, ha a szorzó jegyeit fordított sorrendben írjuk a szorzandó alá, így ugyanis nem ellenkező irányban kell haladnunk, amikor az összeszorzandó jegyeket keressük össze. Lássuk ezt a $12\,468 \cdot 5837$ szorzat példáján:



és hasonlóan haladva tovább:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & 2 & 4 & 6 & 8 \\
 & & & 7 & 3 & 8 & 5 \\
\hline
2\ 4 & 8 & 12 & 11 & 7 & 5 & \\
7\ 2 & 7 & 7 & 5 & 7 & 1 & 6
\end{array}$$

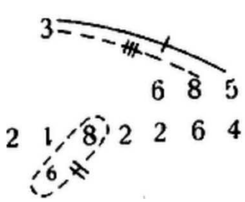
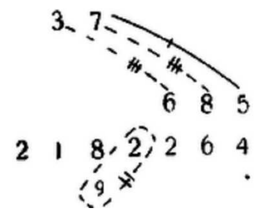
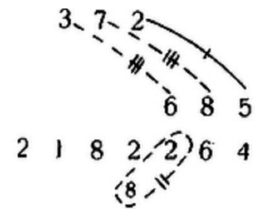
Érdemes, különösen ha több számot kell ugyanazzal megszorozni, a közös szorzó jegyeit egy külön papírszelet (alsó) szélére írni fordított sorrendben és azután úgy tolni ezt a papírszeletet szorzandók fölött egy–egy jeggyel balra, hogy az összeszorzandó jegyek mindig egymás alatt álljanak.

[1] Részlet a TIT József Attila Szabadegyetemén a „Szórakoztató matematika” előadássorozatban 1961. október 3-án elhangzott „Tud-e ön fejben ötödik gyököt vonni?” c. előadásból

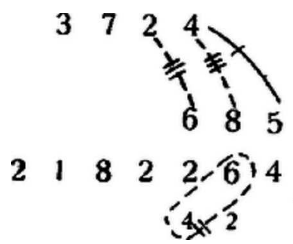
Kevésbé ismert már az, hogy ez az eljárás meg is fordítható és egy olyan osztási eljáráshoz vezet, aminél szintén lehet részletszámítások nélkül csak a hányadost írni, még akkor is, ha azt sok tizedes jegyre kell kiszámítanunk.

Fordítsuk meg először első szorzásunkat, osszuk el 2 182 264-et 586-tal. Az osztót az osztandó fölé fogjuk írni, de könnyebbség kedvéért mindjárt a második szorzás mintájára fordított sorrendben írjuk a jegyeket; a hányadost e fölé fogjuk írni. A hányados nyilván 4-jegyű lesz (ha egész szám, különben 4 jegye lesz a tizedesvessző előtt).

A szorzás utolsó lépésében a két tényező legmagasabb helyértékű jegyét szoroztuk össze – tehát az 5-öt a keresett hányados első jegyével és hozzáadtuk az előző lépés maradékát, így kaptuk a szorzat – adott esetben – első két jegyéből álló számot, 21-et; ezt kell tehát osztanunk 5-tel és kapjuk a hányados első jegyét. Nem lesz azonban célszerű 4-et venni hányadosul, csak 3-at, mert az előző lépésben két jegypár szorzatához adtunk még maradékot, valószínűtlen tehát, hogy csak 1 maradt volna. Ekkor az utolsó előtti lépésből $21 - 3 \cdot 5 = 6$-ot vittünk át, tehát az utolsó előtti lépésben 68-at kaptunk.

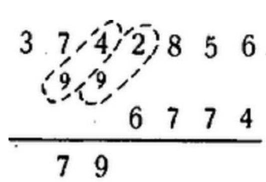
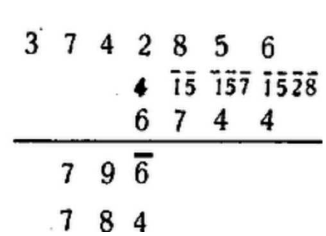




Ez úgy keletkezett, hogy a $3 \cdot 8$ szorzathoz hozzáadtuk a hányados még ismeretlen – második jegyének 5-szörösét és a megelőző lépés maradékát. Ez a két összeadandó tehát együtt $68 - 3 \cdot 8 = 44$-et tesz ki. Ebben az 5 megvan 8-szor, de célszerű lesz 7-et venni következő jegynek, mert 4 túl kicsi lenne az előző átvitelből származó maradéknak. 7-et választva $44 - 7 \cdot 5 = 9$-et vittünk át az előző részletszámításból és 2-t írtunk le, tehát 92 volt az előző részletszámítás eredménye, ami $3 \cdot 6$-ból, $7 \cdot 8$-ból, 5-ször a hányados harmadik jegyéből és az előző lépésből áthozott számból adódott. Így az utolsó két összeadandó együtt 18, és következő jegynek 2-t célszerű venni. Az előző részletszámítás eredménye $18 - 2 \cdot 5 = 8$ tízes és még 2 volt, együtt 82. Így $82 - 7 \cdot 6 - 2 \cdot 8 = 24$ ötödéből számítandó a hányados következő jegye. Ez már a hányados egyes helyértékű jegye, így megpróbálhatjuk 4-et választani, különösen ha várható, hogy a hányados egész szám lesz. Ekkor, mivel az előző részletszámítás 46-ot adott, abból $2 \cdot 6 + 4 \cdot 8$-at elvéve kapjuk, hogy az előző részletszámítás eredménye 24, tehát megtaláltuk a pontos hányadost.



Látjuk, az eljárás elég nagy bizonytalanságot enged meg a jegyek meghatározásában. Ez is lényegesen kisebb lett volna, ha arra gondolunk, hogy az osztó közel van a 600-hoz, ezért első jegyét joggal vehetjük közel 6-nak. A következő jegyből való áthozatot is becsülhetjük a megállapítandó új számjegy birtokában, s ha ez túl nagynak ígérkezik, vehetjük az új számjegyet idejében kisebbre.

Aki azonban biztosan számol negatív számokkal, annak akkor sem kell újra számolnia, ha valahol túl nagy jegyet választott, és „negatív áthozata" marad. Ennek a 10-szereséhez is hozzáveheti a pozitív következő jegyet, kap egy negatív részeredményt. Ebben negatív számszor van meg az osztó, tehát negatív következő számjegyet kapunk, – az ilyeneket föléhúzással fogjuk jelölni. A következő részeredmény lehet pozitív is, negatív is (célszerű nem nagy negatív részeredményre törekedni); és folytathatjuk az eljárást úgy is, ha vegyesen használunk pozitív és negatív számjegyeket is. A végén pl. egy negatív, 10-es helyértékű jegyhez elveszünk egyet a százasokból és levonjuk belőle a tízeseket, és hasonlóan kiküszöböljük a többi negatív számjegyeket is a legmagasabb helyértékűtől haladva lefelé.

Lássunk erre is egy példát (most már az osztandó alá fogjuk írni az osztót – megfordítva a számjegyek sorrendjét – és az alá a hányadost). 3 742 856-ot osszuk el 4776-tal. Az osztó utolsó jegyét célszerű felfelé kerekítve 5-nek venni. A hányadosnak 3 egész szám jegye lesz. Az 5 a második lépésben, $94-7\cdot 7=45$-ben 9-szer van meg. A következő lépésben $94-7\cdot 7-9\cdot 4=9$ folytán $92-7\cdot 7-9\cdot 7=-20$-ból kell az újabb jegyet megállapítani. Ezt vegyük $-6=\overline{6}$-nak, hogy 4-szeresét levonva elég nagy pozitív maradékot kapjunk a további számjegyszorzatok levonására. (Ha azonban még így is negatív maradékra jutunk, az sem baj, az már látható lesz, mennyivel kell a hányadost csökkenteni pozitív és az osztónál kisebb maradék eléréséhez.) Így az előző áthozatra $92-7\cdot 7-9\cdot 7-(-6)\cdot 4=4$; $48-7\cdot 6-9\cdot 7-(-6)\cdot 7=-15$. A következő részeredmény tehát $-150+5=-145$, és a további számítás:$-145-9\cdot 6-(-6)\cdot 7=-157$, $-1564-(-6)\cdot 6=-1528$. Ezzel azt kaptuk, hogy

$$3\,742\,856=4776\cdot 79\overline{6}+\overline{1}\,\overline{5}\,\overline{2}\,\overline{8}=4776\cdot 784-1528=4776\cdot 783+3248.$$

Ebből az is látható, hogy a kapott 784 hányados van közelebb a 3 742 856/4776 hányadoshoz. – Tizedes jegyeket utólag is számíthatunk az $\overline{1}\,\overline{5}\,\overline{2}\,\overline{8}$-at vagy a 3248-at a fenti módon (vagy más úton) tovább osztva.

Érdekes megjegyezni, hogy az osztás ilyen módon való végzésének lehetőségét először Ferrol számolóművész írta le, aki újra fedezte fel magának a szorzás fent leírt módját is.[1] Ez annál is figyelemre méltóbb, mert a számolóművészek gyakran nem sok érdeklődést és érzéket mutatnak a matematika iránt. Láthatjuk azonban, hogy ez sem szabály.

Surányi János

[1] P. Maennchen, *Geheimnisse der Rechenkünstler,* B. G. Teubner, Leipzig–Berlin 1913. 33–39 old.