1. feladat. *Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:*

$$x^3y^2z=2, \tag{1}$$
$$y^3z^2u=8, \tag{2}$$
$$z^3u^2x=32, \tag{3}$$
$$u^3x^2y=8. \tag{4}$$

Megoldás. Világos, hogy egyik ismeretlen sem lehet 0, másrészt, mivel az (1) egyenlet bal oldalán y kitevője páros, x-é és z-é páratlan, így x és z egyező előjelű (ugyanez olvasható le (3)-ból is). Ugyanígy következik (2)-ből (vagy (4)-ből), hogy y és u is egyező előjelű.

Az egyenletek hasonló szerkezetét kihasználhatjuk azáltal, hogy összeszorozzuk őket, így mindegyik ismeretlen kitevője egyenlő lesz.
$$x^6y^6z^6u^6=2\cdot 8\cdot 32\cdot 8=2^{12}.$$
Ebből hatodik gyököt vonva, mivel az ismeretlenek szorzata az előjelekre tett megállapítások szerint pozitív, kapjuk, hogy

$$xyzu=2^2=4. \tag{5}$$

(2)-t (1)-gyel osztva

$$\frac{yzu}{x^3}=4, \tag{6}$$

és ezzel (5)-öt osztva
$$x^4=1, \qquad \text{amiből} \qquad x=\pm 1.$$
Hasonlóan lehet kiszámítani a többi ismeretlent: (5)-öt előbb (3) és (2) hányadosával osztva $y=\pm 1$, majd (4) és (3), végül pedig (1) és (4) hányadosával osztva $z=\pm 2$, ill. $u=\pm 2$.

A fentiekből azt is látjuk, hogy az x, z és y, u ismeretlen-párok előjelei függetlenek egymástól, azért megoldást a következő négy értékrendszer szolgáltathat:

$$\begin{array}{llll}
x_1=1, & z_1=2, & y_1=1, & u_1=2;\\
x_2=1, & z_2=2, & y_2=-1, & u_2=-2;\\
x_3=-1, & z_3=-2, & y_3=1, & u_3=2;\\
x_4=-1, & z_4=-2, & y_4=-1, & u_4=-2.
\end{array}$$

A próba mutatja, hogy mindegyik kielégíti az egyenletrendszert. Ezzel feladatunkat megoldottuk.

Megjegyzések. 1. Ugyancsak egyszerű a kiküszöbölés, ha (2) és (3) szorzatát osztjuk (1) és (4) szorzatával, ill. (3) és (4) szorzatát osztjuk (1) és (2) szorzatával

$$\frac{xy^3z^5u^3}{x^5y^3zu^3}=\left(\frac{z}{x}\right)^4=\frac{8\cdot 32}{2\cdot 8}=16, \quad \text{ill.} \quad \left(\frac{u}{y}\right)^4=16,$$

amiből – az előjelekről tett észrevétel alapján –

$$z=2x, \qquad\qquad u=2y.$$

Így pedig (1) és (2)-ből
$$x^4y^2=x^2y^4=1, \qquad \left(\frac{x}{y}\right)^2=1, \qquad y=\pm x.$$

2. Kézenfekvő az (1) – (4) egyenletek két oldalának logaritmusát venni, így ugyanis az ismeretlenek logaritmusaira elsőfokú egyenletrendszert kapunk. Minthogy a jobb oldalon 2-nek pozitív egész kitevős hatványai állnak, célszerű a 2-alapú logaritmusok egyenlőségét felírni.

$${}^2\log x=X, \quad {}^2\log y=Y, \quad {}^2\log z=Z, \quad {}^2\log u=U\text{-val} \tag{7}$$

$$3X+2Y+Z=1, \tag{1*}$$
$$3Y+2Z+U=3, \tag{2*}$$
$$3Z+2U+X=5, \tag{3*}$$
$$3U+2X+Y=3. \tag{4*}$$

Lényegesen különböző megoldásokhoz így sem jutunk, csak szorzás-osztás helyett összeadást ill. kivonást, hatványozás-gyökvonás helyett pedig szorzást-osztást kell ekkor végeznünk. Másrészt viszont így csak pozitív megoldást kaphatunk.

Több versenyző próbálkozott ilyen megoldással, de 10 alapú logaritmusokat használtak és a jobb oldalakat négy tizedes jegyű közelítő értékeikkel helyettesítették.

2. feladat. *Bizonyítsuk be, hogy 6 egymás után következő egész szám között mindig van olyan, amely az összes többihez képest relatív prím.*

I. megoldás. Azt kell bebizonyítanunk, hogy a 6 szám valamelyikének a többi számok egyikével sincs közös osztója.

Nézzük meg, mely számok lehetnek két-két adott szám közös osztói. Ha az A és B egész számok közös osztója d, azaz $A = ad$ és $B = bd$ – ahol a és b egész –, akkor d az $A - B = (a - b)d$ különbségnek is osztója. A 6 egymás utáni szám közti különbségek legnagyobbja 5, ezért a számokból képezhető párok közös osztói gyanánt csak 2, 3, 4 és 5 jöhet szóba. Ha egy szám ezek egyikével sem osztható, annak a 6 tagú sorozat egyetlen más tagjával sincs közös osztója.

6 egymás utáni egész szám közül három páros, három páratlan. A keresett szám csak a páratlanok egyike lehet, hiszen bármely két páros számnak közös osztója a 2. Továbbá 6 egymás utáni szám közül pontosan kettő 3-mal osztható, és ezek egyike páros, másika páratlan, végül közülük egy vagy két szám 5-tel osztható, és ezek közül is csak egyik lehet páratlan. Eszerint a három páratlan szám közül legfeljebb kettő osztható 3-mal vagy 5-tel, és így legalább egyikük sem 3-mal, sem 5-tel nem osztható. Ez a szám a fentiek szerint a sorozat összes többi tagjaihoz képest relatív prím. Ezzel a bizonyítást hefejeztük.

Ha a három páratlan szám közül egyik sem osztható 5-tel, vagy ha a 3-mal osztható páratlan szám egyben 5-tel is osztható, akkor mind a két 3-mal nem osztható páratlan szám relatív prím a sorozat többi tagjához.

Megjegyzés. A versenyzők egy része megkísérelte az összes, a 2, 3 és 5-tel való oszthatóság szempontjából lehetséges alakú hat egymás után következő számból álló sorozatok végigvizsgálását. Az ilyen sorozatok a 2-vel való oszthatóság szempontjából kétfélék: az első vagy a második tagjuk osztható 2-vel; a 3-mal való oszthatóság szempontjából háromfélék: az első vagy a második vagy a harmadik tagjuk osztható 3-mal; az 5-tel való oszthatóság szempontjából pedig hasonlóan ötfélék. Eszerint a sorozatok a 2, 3 és 5-tel való oszthatóság szempontjából együttesen $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ félék. Nem hibás eljárás az állítást e 30 fajta számsorozat megvizsgálása útján bizonyítani be, de hosszadalmas és eléggé ötlettelen.

II. megoldás. Bővítsük ki a hattagú számsorozatot *páratlan számmal kezdődő* héttagú, egymás utáni számokból álló sorozattá úgy, hogy ha az adott sorozat páratlan számmal kezdődik, akkor a végéhez fűzzük hozzá a soron következő páratlan számot, az ellenkező esetben pedig a sorozat első tagját megelőző páratlan számot vesszük hozzá. Legyen a keletkező sorozat:

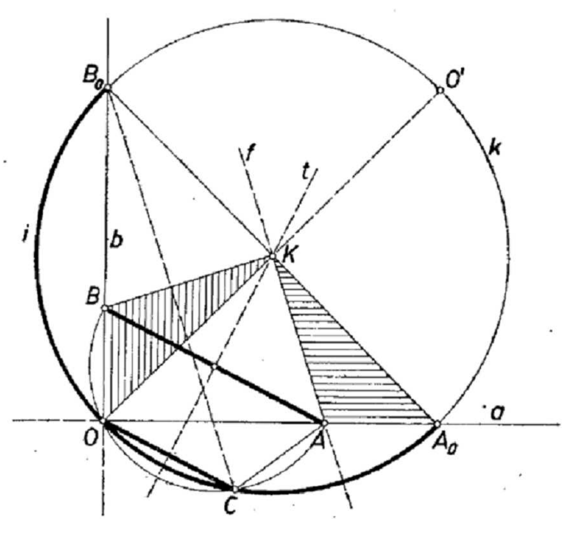
$$2n - 3, \quad 2n - 2, \quad 2n - 1, \quad 2n, \quad 2n + 1, \quad 2n + 2, \quad 2n + 3.$$

Megmutatjuk, hogy az állítás teljesül a kibővített sorozat egy a szélsőktől különböző tagjára, tehát érvényes a hozzáfűzött szám elhagyásával visszamaradó, eredeti sorozatra is.

A kibővített sorozat középső tagja, $2n$ páros. Mindkét szomszédja, $2n - 1$ és $2n + 1$ hozzátartozik az eredeti sorozathoz is és páratlan. Legalább egyikük nem osztható 3-mal, ez a keresett szám. Ugyanis ez a szám 2-vel és 3-mal nem osztható, ezért ha van közös osztója a sorozat valamelyik tagjával, e közös osztó csak 5 lehet. Azonban akár $2n-1$, akár $2n + 1$ osztható 5-tel, a bővített sorozatban nincs több 5-tel osztható szám.

Ez a megoldás *Máté Attilától* származik. A feladat állításánál valamivel többet ad: a sorozat második páros tagjának 3-mal nem osztható szomszédja mindig relatív prím a többi tagok mindegyikéhez.

3. feladat. *Egy derékszög csúcsa O, szárai „a”, „b”. Az A és B pontok úgy mozognak az „a” és „b” félegyeneseken, hogy $AO + OB$ állandó. Az AB átmérőjű körön úgy jelöljük ki a C pontot, hogy OC legyen párhuzamos AB-vel. Mi a C pontok mértani helye?*



Megoldás. Mérjük rá a és b-re O-tól az állandó $AO+OB$ szakaszt és jelöljük a végpontot A_0, ill. B_0-lal. O, A_0 és B_0 tágabb értelemben hozzátartozik a keresett mértani helyhez. Ha ugyanis $AO=OB=OA_0/2$, akkor az AB-vel O-n át húzott párhuzamos érinti az AB átmérőjű kört, így C gyanánt csak maga O vehető. Ha pedig A az A_0 határhelyzetbe, és ezért B az O-ba kerül, akkor AB átmegy O-n, és így C egybeesik A_0-lal. Ugyanígy $A\equiv O$, $B\equiv B_0$ esetén $C\equiv B_0$. Néhány további C-pont megszerkesztése után a szemlélet azt a sejtést adja, hogy a keresett mértani hely az A_0B_0 átmérő fölötti, O-n átmenő i félkör, más szóval az A_0B_0O egyenlő szárú derékszögű háromszög köré írt k körnek az O-t tartalmazó $A_0B_0=i$ íve. Bebizonyítjuk, hogy A_0B_0 felezőpontját K-val jelölve mindig fennáll $KC=KA_0=KO$.

Szerkesztésünk szerint $BO+OA=OA_0=OA+AA_0$, tehát $BO=AA_0$; másrészt $KO=KA_0$ és $KOB\sphericalangle=KA_0A\sphericalangle=45^\circ$, így a KOB és KA_0A háromszögek egybevágók. Ezért $KB=KA$, vagyis AB-nek t felező merőlegese az AB minden helyzetében átmegy K-n. Ámde t egyszersmind az $ACOB$ húrtrapéz szimmetriatengelye, tehát OC-t is merőlegesen felezi, és így valóban $KC=KO=KA_0$. Eszerint a mértani hely minden pontja k-n van.

Megmutatjuk másrészt, hogy az i ív minden C^* pontja hozzátartozik a keresett mértani helyhez. Messe a C^*A_0 húr f felező merőlegese a-t A^*-ban, forgassuk el a KA_0A^* háromszöget K körül úgy, hogy A_0 az O-ba jusson, és legyen ekkor A^* új helyzete B^*. Megmutatjuk, hogy az A^*, B^* pontokhoz a feladat feltételei szerint C^* tartozik hozzá. [1]

A használt forgatás szöge $A_0KO\sphericalangle=90^\circ$, ezért az a-n levő A_0A^* oldal új OB^* helyzete merőleges a-ra, tehát B^* a b-n van. Továbbá $OB^*=A_0A^*$, tehát $OA^*+OB^*=OA^*+A^*A_0=OA_0$, az előírt állandó. – Másrészt f átmegy K-n, így a KA^*C^* háromszög az f-re vett tükörképe KA^*A_0-nak, az utóbbi pedig azonos körüljárással egybevágó KB^*O-val, tehát KA^*C^* és KB^*O ellentétes körüljárással egybevágók. És mivel K csúcsuk közös, azért van olyan t^* tengely, amelyre tükrözve egymásba mennek át. Tehát A^*B^* és C^*O párhuzamosak (merőlegesek t^*-ra), és az A^*B^*, C^*, O pontok egy szimmetrikus trapéz csúcsai. Végül $A^*OB^*\sphericalangle=90^\circ$, ezért O, és vele C^* is rajta van az A^*B^* átmérőjű körön. Ezzel állításunkat bebizonyítottuk.

Amíg C az O-t tartalmazó $A_0B_0=i$ íven van, addig $A_0KA\sphericalangle=A_0KC\sphericalangle/2=A_0B_0C\sphericalangle<90^\circ=A_0KO\sphericalangle$, tehát A az A_0O szakaszon, az a félegyenesen van, és ennélfogva B a b-nek pontja. Ha viszont C-t a k-nak az A_0OB_0 szögtartományba eső ívén vennénk, akkor a CO-val párhuzamos egyenesek vagy csak a-t, vagy csak b-t metszenék, így nem lehetséges a C-t előállító A, B pontpár.

Mindezek szerint a C pontok mértani helye valóban az A_0OB_0 félkörív.

Megjegyzés. Ha megengedjük, hogy A túlmehessen az A_0 határhelyzeten, akkor $AO+OB$ állandósága csak negatív OB-vel maradhat fenn. Ennek a b félegyenes O-n túli meghosszabbításán levő B pontot feleltetve meg, a fentiekhez hasonlóan belátható, hogy C mértani helye az OB_0 negyedkörnek K-ra vett $O'A_0$ tükörképe (az O' pont kivételével, mert így mindig fennáll $|OB|<OA$, tehát AB és OC az a-val 45°-nál kisebb szöget zár be). Ha pedig B halad túl B_0-on és A az a félegyenes O-n túli meghosszabbításán van, akkor C mértani helye az $O'B_0$ negyedív (O'-t kizárva). Ezek szerint előjellel vett OA, OB távolságokat tekintve C mértani helye a k kör az O' pont kivételével.

Lőrincz Pál, Bakos Tibor, Surányi jános

[1] Az ábrán a *-okat nem tüntettük fel.