**1. feladat.** *Bizonyítsuk be, hogy minden többjegyű négyzetszámban van legalább két különböző számjegy.*

**I. megoldás.** A bizonyítandó állítást így is fogalmazhatjuk: nincs olyan többjegyű négyzetszám, amelynek minden jegye megegyezik.

Megjegyezzük, hogy ha egy szám elé nullákat írunk, értéke nem változik, de ezeket a nullákat a jegyek számának megállapításakor nem vesszük tekintetbe. Pl. 05 nem kétjegyű, hanem egyjegyű szám. Így a több 0-val írt $000\dots0$ számok teljes négyzetek, de ezeket nem tekintjük többjegyűnek.

Ezek után a következő alakú számokról kell bebizonyítanunk, hogy nem lehet köztük négyzetszám:

$$\begin{array}{ccc} 1\dots1, & 4\dots4, & 7\dots7, \\ 2\dots2, & 5\dots5, & 8\dots8, \\ 3\dots3, & 6\dots6, & 9\dots9, \end{array}$$

akárhány – a szélsőkkel megegyező – jegyet képzeljünk is a pontok helyére. (Az „akárhány” szó itt nullát is jelenthet, vagyis azt, hogy a pontokat kihagyva a két szélső számjegyből alkotunk számot.) Közülük négyet mindjárt kizárhatunk, mert 2-re, 3-ra, 7-re és 8-ra nem végződhet négyzetszám. Az egyjegyű számok négyzetéről ezt a lehetséges esetek végignézésével azonnal megállapíthatjuk:

$$\begin{array}{lllll} 0^2 = 0, & 1^2 = 1, & 2^2 = 4, & 3^2 = 9, & 4^2 = 16, \\ 5^2 = 25, & 6^2 = 36, & 7^2 = 49, & 8^2 = 64, & 9^2 = 81. \end{array}$$

Többjegyű számok négyzetére pedig azért igaz ez az állítás, mert csak az utolsó jegyüktől függ, hogy mi lesz a négyzetüknek az utolsó jegye.

Általánosabban: két szám szorzatának utolsó jegye csak a számok utolsó jegyétől függ. Ezt könnyen beláthatjuk, ha a szorzás szokásos elvégzési módjára gondolunk, például

$$\begin{array}{r} 27\cdot 42 \\ \overline{\phantom{0}54} \\ 108\phantom{0} \\ \hline 1134 \end{array}$$

Az utolsó jeggyel végzett szorzás részletszorzatának utolsó jegyéhez már nem adunk semmit, ez lesz a szorzat utolsó jegye.

Az egyjegyű számok négyzetét megfigyelve még egy megállapítást tehetünk: a páratlan egyjegyű számok négyzetének tizese páros (a fenti felsorolásban: 0, 0, 2, 4, 8). Számpéldák azt mutatják, hogy ez érvényes többjegyű számokra is. Ha ez mindig így van, akkor a csupa 1, 5, 9-ből álló számok sem lehetnek négyzetszámok, hiszen utolsó előtti jegyük páratlan.

Bebizonyítjuk, hogy minden többjegyű páratlan szám négyzetének utolsó előtti jegye páros. Ezt beláthatjuk a négyzetreemelés bármelyik szokásos eljárása alapján, vagy algebrailag a következő módon. Jelöljük a szám utolsó jegyét $a$-val, az utolsó jegy elhagyásával visszamaradó számot $10\ A$-val. Ekkor

$$(10A + a)^2 \equiv 100A^2 + 20Aa + a^2,$$

és itt az első tag nem befolyásolja a négyzetszám tízesét, a második tag páros jeggyel járul hozzá, és ha a páratlan, akkor a harmadik tag is páros jeggyel járul hozzá, mint arról az esetek végignézésével már az előbb meggyőződtünk.

Most már csak a $4\dots4$ és $6\dots6$ alakú számokról kell bebizonyítanunk, hogy nem lehetnek négyzetszámok. Ezek páros számok, tehát mindegyikük csak páros számnak lehetne a négyzete. A $6\dots6$ szám nem lehet négyzetszám, mert páros szám négyzete 4-gyel is osztható: $(2c)^2 = 4c^2$, viszont $6\dots6 = 6\cdot1\dots1$ páros, de 4-gyel nem osztható.

Azt is látjuk, hogy páros szám négyzetének a negyedrésze is négyzetszám ($c^2$), viszont $4\dots4 = 4\cdot1\dots1$, és itt a második tényező egy legalább két 1-esből álló szám, az ilyenekről pedig már beláttuk, hogy nem lehetnek négyzetszámok.

Minden esetet végignéztünk, s így bebizonyítottuk, hogy többjegyű négyzetszám nem állhat egyező jegyekből, mindig van benne legalább két különböző számjegy.

**II. megoldás.** Láttuk, hogy egész számok négyzetének (általánosan: egész számok szorzatának) utolsó jegye csak az alap (a tényezők) utolsó jegyétől függ. Hasonlóan belátható, hogy a szorzat utolsó két jegye is csak a tényezők utolsó két jegyétől függ.

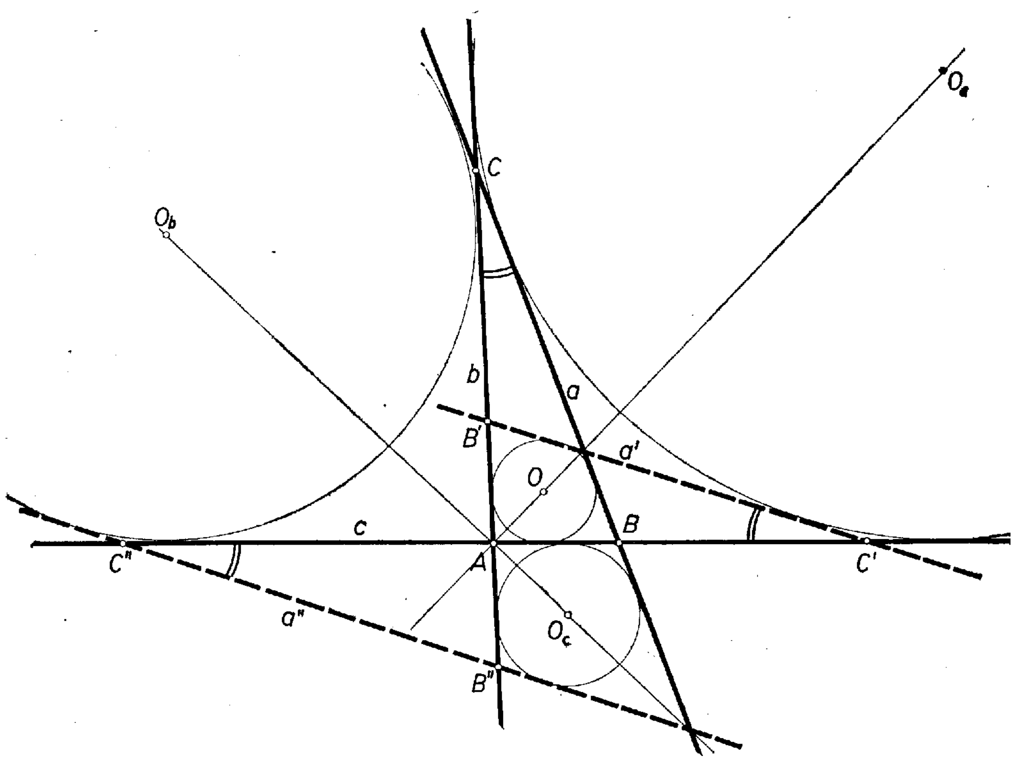
Ezt is bebizonyíthatjuk akár a szorzási eljárás elemzése alapján, akár algebrai jelöléssel. Lássuk az utóbbit. Jelentse $a$ és $b$ a szóban forgó tényezők utolsó két jegyéből álló számot, $A$ és $B$ az elhagyásuk után visszamaradt számot. Akkor maguk a tényezők $100A + a$ és $100B + b$, szorzatuk pedig $10\,000AB + 100Ab + 100aB + ab$. Az első három tag nem befolyásolja a szorzat utolsó két jegyét, hiszen mindegyiknek a végén legalább két 0 van. Tehát a szorzat utolsó két jegye – mint állítottuk – megegyezik a tényezők utolsó két jegyéből álló számok ($a$ és $b$) szorzatának utolsó két jegyével.

Ha tehát meg akarjuk állapítani, hogy mi lehet egy négyzetszám utolsó két jegye, elég végignéznünk az egy- és kétjegyű számok négyzetének utolsó két jegyét. Célszerű ehhez elővenni a Négyjegyű Függvénytáblázatot, amelyet a versenyzők – mint általában bármely könyvet – szabadon használhattak. Megállapíthatjuk, hogy egyező jegyekként csak 00 és 44 fordul elő az utolsó két helyen. (Megjegyezzük, hogy a vizsgálandó négyzetszámok legfeljebb négy jegyűek, így a táblázat a kerekítés nélküli, pontos értéküket közli.) Egy csupa 0-ból álló számot nem tekintünk többjegyűnek. Ha volna csupa 4-esből álló többjegyű négyzetszám, akkor volna csupa 1-esből álló is, amint azt az I. megoldásban beláttuk. Ilyen azonban nincs, hiszen az utolsó két jegy nem lehet 11, tehát csupa 4-esből álló négyzetszám sem fordulhat elő. A többjegyű négyzetszámokban tehát csakugyan kell lennie legalább két különböző jegynek.

*Megjegyzés.* A $0, 1, \ldots, 99$ számok négyzete helyett elég csak a $0, 1, \ldots, 25$ számok négyzetét végignézni, mert 25-ön túl új kétjegyű végződés nem lép fel. Egyrészt ugyanis $(50-a)^2$-nek ugyanaz az utolsó két jegye, mint $a^2$-nek, hiszen különbségük, $2500-100a$, 100-nak többszöröse, és ha $0 \le a \le 25$, akkor $25 \le 50-a \le 50$; másrészt $(b+50)^2$-nek hasonló okból ugyanaz az utolsó két jegye, mint $b^2$–nek, és ha $b$ 0-tól 50-ig változik, akkor $50+b$ végigfut 50-től 100-ig a számokon.

**2. feladat.** *Rajzoljuk meg azt a négy kört, amelyek érintik egy háromszög oldalegyeneseit, vagyis a beírt kört és a hozzáírt köröket. Bizonyítsuk be, hogy a beírt és bármelyik hozzáírt kör negyedik közös érintője párhuzamos a másik két hozzáírt kör negyedik közös érintőjével.*

**I. megoldás.** Az $ABC$ háromszög $a$ oldalegyenese a beírt és az $O_a$ középpontú hozzáírt kör egyik közös belső érintője. Jelöljük e két kör másik közös belső érintőjét $a'$-vel. Az $a$ egyenes érinti a másik két hozzáírt kört is, mint e körök közös külső érintője. Jelöljük ennek a két körnek a másik közös külső érintőjét $a''$-vel. Bebizonyítjuk, hogy $a' \parallel a''$.




Két kör együttesen tükrös a középpontjukon át húzott egyenesre, a két kör úgynevezett centrálisára. Ebből következik, hogy két kör közös belső érintői, és ugyanúgy közös külső érintői is tükrösek a két kör centrálisára. Így pl. $a'$ az $a$ oldal tükörképe az $OO_a$ centrálisra vonatkozóan, $a$-nak az $O_bO_c$ centrálisra vonatkozó tükörképe pedig $a''$. Eszerint az $a'$ egyenest két különböző tengelyre vonatkozó egymás utáni tükrözés átviszi az $a''$ egyenesbe. Tudjuk viszont, hogy két egymást metsző egyenesre való tükrözés együttesen egy olyan elforgatást eredményez, amelynek a szöge a tükörtengelyek egymással alkotott szögének kétszerese, és a forgatás középpontja a két tengely metszéspontja. Az egyik tükörtengely $OO_a$, a $b$ és $c$ egyenesek egyik szögfelezője, a másik $O_bO_c$, ugyanennek az egyenespárnak a másik szögfelezője. A két szögfelező, mint tudjuk, merőleges egymásra. Tehát az $a'$ egyenest két egymásra merőleges egyenesre való tükrözés, vagyis az $A$ pont körüli $180°$-os elforgatás viszi át az $a''$ egyenesbe, és így csakugyan $a' \parallel a''$.

Hasonló jelöléssel és gondolatmenettel következik az is, hogy $b' \parallel b''$ és $c' \parallel c''$.

**II. megoldás.** Az előző megoldás jelöléseit használjuk. Jelöljük továbbá $a'$ és $b$ metszéspontját $B'$-vel, $a'$ és $c$ metszéspontját $C'$-vel, $a''$ és $b$, ill. $a''$ és $c$ metszéspontját $B''$-vel, ill. $C''$-vel. A szimmetria miatt $BC'CB'$ egyenlő szárú trapéz, tehát húrnégyszög, és így $BC'B'\sphericalangle = BCB'\sphericalangle$. Ugyanezt mondhatjuk a $BCC''B''$ négyszögről is. Ennélfogva $BCB''\sphericalangle = BC''B''\sphericalangle$. Ezek szerint $BC'B'\sphericalangle = BC''B''\sphericalangle$, és így $a' \parallel a''$.

**3. feladat.** *Egy köralakú versenypályának egy pontjából egyszerre egy irányban elindult három futó. Az első* 6 perc *alatt utolérte (lekörözte) a másodikat,* 10 perc *alatt a harmadikat. Hány perc alatt érte utol a harmadik a másodikat? (A futók sebességét tekintsük egyenletesnek, a pálya szélességét hagyjuk figyelmen kívül).*

**I. megoldás.** Legyen a futók sebessége sorban $u$, $v$ és $w$, a pálya kerülete $k$, a keresett idő pedig, ahány perc alatt a harmadik futó lekörözte a másodikat, $x$. Akkor a megtett utakra a következő egyenleteket írhatjuk fel:

$$6u = 6v + k, \quad \text{vagyis} \quad 6u - 6v - k = 0, \tag{1}$$

$$10u = 10w + k, \quad \text{vagyis} \quad 10u - 10w - k = 0, \tag{2}$$

$$xw = xv + k, \quad \text{vagyis} \quad xw - xv - k = 0. \tag{3}$$

Az (1) egyenletet $5x$-szel, (2)-t $3x$-szel, (3)-at 30-cal szorozva $u$, $v$ és $w$ szorzója mindegyik egyenletben $30x$ vagy $-30x$ lesz:

$$30xu - 30xv - 5xk = 0, \tag{4}$$

$$30xu - 30xw - 3xk = 0, \tag{5}$$

$$30xw - 30xv - 30k = 0. \tag{6}$$

(5) és (6) összegéből kivonva (4)-et $u$, $v$ és $w$ kiesik:

$$2xk - 30k = 0.$$

Minthogy $k \neq 0$, ebből $x = 15$. Tehát a harmadik futó 15 perc alatt körözte le a másodikat.

**II. megoldás.** A feladatot sok másféle módon is megoldhatjuk, kevesebb ismeretlennel is, mint az I. megoldásban, sőt egyenlet nélkül is.

Képzeljük, hogy a futók változatlan sebességgel tovább futnak. Az első a másodikat minden 6 perc elteltével, a harmadikat minden 10 perc elteltével lekörözi, tehát fél órával az indulás után az első éppen 5 körrel futott többet, mint a második, és 3 körrel futott többet, mint a harmadik (tehát mindhárman a pálya ugyanazon pontján vannak). Így hát a harmadik futó fél órával az indulás után $5 - 3 = 2$ körrel futott többet, mint a második. Ebből következik, hogy negyedóránként (15 percenként) körözte le a másodikat.

*Megjegyzés.* Az adatokból az $u$, $v$, $w$ és $k$ ismeretlenek nem is számíthatók ki, még az arányuk sem.

**Varga Tamás**