1. feladat. *Bizonyítsuk be, hogy ha az*

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{1}$$

egyenlet valamennyi együtthatója páratlan szám, akkor az egyenlet gyökei nem racionálisak.

I. megoldás. a páratlan szám, s így minden esetre 0-tól különböző, tehát az egyenlet másodfokú. Tegyük fel a bizonyítandó állítással ellentétben, hogy az

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

gyökök racionálisak. Ekkor $\sqrt{b^2 - 4ac}$ is racionális, de ez csak úgy lehet, ha egész is a négyzetgyök értéke. Mert ha valamilyen d/g törttel volna egyenlő, feltehetjük hogy ez a tört tovább már nem egyszerűsíthető alakja. De ekkor d^2/g^2 sem egyszerűsíthető, mert különben volna egy prímszám is, amivel egyszerűsíthető, de d^2 és g^2 csak úgy lehet p-vel osztható, ha d és g is osztható p-vel, [1] tehát d/g is egyszerűsíthető volna. Kell tehát, hogy $g^2 = 1$, s így $b^2 - 4ac = d^2$ legyen. Itt d páratlan, mert a bal oldalon b-vel együtt b^2 is az, és egy páratlan és páros szám különbsége páratlan. Így d egy páros számmal tér el b-től, $d = b - 2d'$. Ekkor

$$b^2 - 4ac = (b - 2d')^2, \quad 4ac = 4d'(b - d'),$$
$$ac = d'(b - d').$$

Az utolsó egyenlőségben azonban balról két páratlan szám szorzata áll és ez páratlan; a jobb oldalon viszont ha d' páros, akkor az első tényező páros, ha pedig d' páratlan, akkor a második tényező két páratlan szám különbsége s így páros szám. Ez az egyenlőség tehát nem állhat fenn. Így helytelen volt az a feltevésünk, amiből kiindultunk, hogy az (1) egyenletnek volna racionális gyöke.

II. megoldás. Tegyük fel, hogy valamilyen p/q tört kielégítené (1)-et. Megmutatjuk, hogy ez nem lehetséges. Feltehetjük, hogy p/q már tovább nem egyszerűsíthető alakban van írva. Feltevésünk szerint

$$a\frac{p^2}{q^2} + b\frac{p}{q} + c = 0.$$

Innen, q^2-nel szorozva

$$ap^2 + bpq + cq^2 = 0. \tag{2}$$

Ha itt p is, q is páratlan, akkor a bal oldal mindhárom tagja is az, mert páratlan számok szorzata is páratlan, s így az összeg is páratlan. De akkor is páratlan (2) bal oldala, ha p és q közül az egyik páratlan, a másik páros, mert ekkor két tag páros, egy páratlan. Így egyik esetben sem lehet (2) bal oldala 0. Viszont p is, q is páros nem lehet, mert akkor a p/q tört egyszerűsíthető volna. Így (2) nem teljesülhet, tehát p/q nem elégítheti ki (1)-et.

Megjegyzések. 1. Több versenyző rámutatott, hogy az utóbbi bizonyítással bármely, csupa páratlan együtthatós, páros fokszámú egyenletről belátható, hogy nem lehet racionális gyöke.

2. *Fila Jenő* tanár (Zilah, Román NK.) megjegyezte, hogy még általánosabban, ha

$$f(x) = a_0x^{2k} + a_1x^{2k-1} + \ldots + a_{2k-1}x + a_{2k}$$

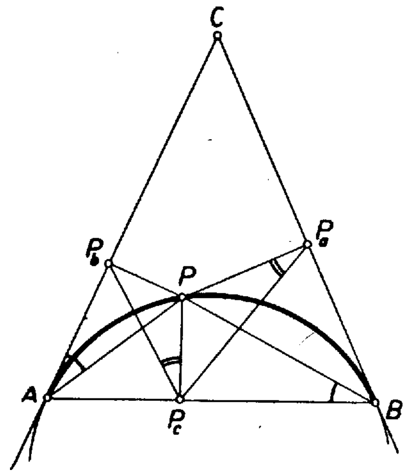
(páros fokú) egész együtthatós polinom, továbbá a_0, a_{2k} és még páratlan számú együttható páratlan, akkor $f(x)$ racionális helyen nem lehet 0. A fenti gondolatmenet mintájára

$$q^{2k}f\left(\frac{p}{q}\right) = a_0p^{2k} + a_1p^{2k-1}q + \ldots + a_{2k-1}pq^{2k-1} + a_{2k}q^{2k}.$$

Ha itt p és q egyike páros, a másika páratlan, akkor a jobb oldal páratlan, mert egy tag páratlan (az első vagy az utolsó); ha pedig p is, q is páratlan, akkor a páratlan együtthatós tagok páratlanok, a páros együtthatósak párosak, s így a jobb oldal ismét páratlan. Nem lehet tehát 0, s így $f\left(\frac{p}{q}\right)$ sem.

2. feladat. *Határozzuk meg egy egyenlő szárú háromszög belsejében fekvő ama pontok mértani helyét, melyekre a száraktól mért távolságok mértani közepe megegyezik az alaptól mért távolsággal.*

[1] Ez abból következik, hogy minden szám egyértelműen bontható prímszámok szorzatára. Ugyanis d^2-et prímtényezők szorzatára bonthatjuk úgy, hogy d-t felbontjuk és ezt a felbontást négyzetre emeljük. Ha ettől különböző felbontás nem lehetséges, akkor d^2-nek valóban nem lehet olyan prímosztója, ami nem osztója d-nek.



Megoldás. Megmutatjuk, hogy a feladat követelményeit kielégítő minden pontból ugyanakkora szög alatt látszik az AB alap. Legyen az ABC háromszögben $CA = CB$, és P egy a feltételnek megfelelő pont, azaz ha vetülete az AB alapra P_c, és a CA, CB szárra P_b, P_a, akkor

$$PP_a \cdot PP_b = PP_c^2.$$

PP_aBP_c és PP_cAP_b a PB, ill. PA átmérő fölötti Thalész-körbe írt húrnégyszögek. Ezért

$$P_aPP_c\sphericalangle = 180^\circ - P_aBP_c\sphericalangle = 180^\circ - CBA\sphericalangle = 180^\circ - CAB\sphericalangle = \\ = 180^\circ - P_bAP_c\sphericalangle = P_cPP_b\sphericalangle.$$

Másrészt a feltevésből átalakítással

$$PP_a : PP_c = PP_c : PP_b.$$

Ezek szerint a P_aPP_c és P_cPP_b háromszögek hasonlók, tehát $P_cP_aP\sphericalangle = P_bP_cP\sphericalangle$.

Ebből ismét az említett húrnégyszögekre tekintettel $P_cBP\sphericalangle = P_bAP\sphericalangle$, vagyis $ABP\sphericalangle = CAP\sphericalangle$. Így az ABP háromszögben

$$PAB\sphericalangle + ABP\sphericalangle = CAB\sphericalangle - CAP\sphericalangle + ABP\sphericalangle = CAB\sphericalangle,$$

tehát $APB\sphericalangle = 180^\circ - CAB\sphericalangle$, állandó. Eszerint P az AB szakasz $\omega = 180^\circ - CAB\sphericalangle$ nyílású látószög-körívének pontja.

Csak arról az i körívről lehet szó, amely AB-nek C-vel megegyező oldalán van, mert P-nek az ABC háromszög belsejében kell lennie.

Mivel $CAB\sphericalangle < 90^\circ$, azért $\omega > 90^\circ$; így i-nek O középpontja AB-nek C-vel ellentétes oldalán van, és az i-hez tartozó középponti szög $AOB\sphericalangle = 360^\circ - 2\omega = 2CAB\sphericalangle$. Ezért az ABO háromszögből $BAO\sphericalangle = ABO\sphericalangle = 90^\circ - CAB\sphericalangle$, tehát $OA \perp CA$. Eszerint az AC, BC szár A, ill. B-ben érinti i-t, vagyis A és B-t nem tekintve i minden pontja az ABC háromszög belsejében van.

Megmutatjuk, hogy i minden Q pontja megfelel a követelménynek. Legyen Q vetülete az AB, AC, BC oldalon Q_c, Q_b, Q_a. Mivel Q az i íven van, $AQB\sphericalangle = 180^\circ - CAB\sphericalangle$. Így az ABQ háromszögből

$$QBA\sphericalangle = 180^\circ - AQB\sphericalangle - QAB\sphericalangle = CAB\sphericalangle - QAB\sphericalangle = CAQ\sphericalangle,$$

másrészt QQ_aBQ_c és QQ_cAQ_b húrnégyszögek, ezért

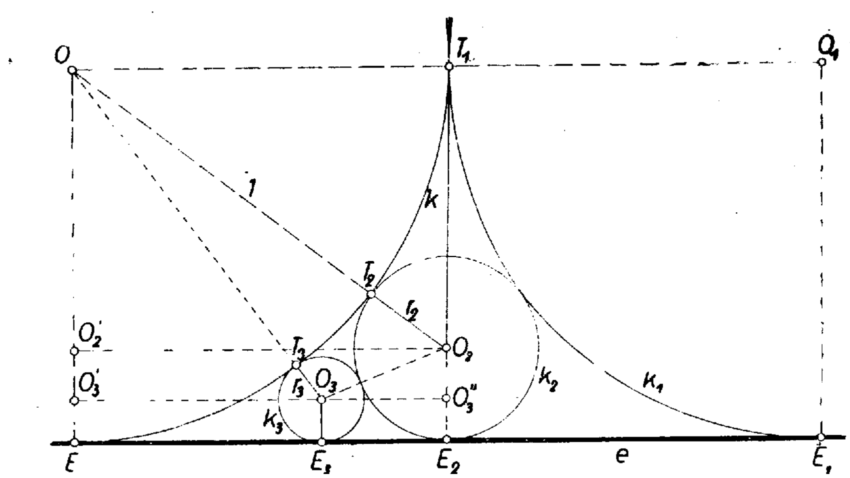
$$QQ_aQ_c\sphericalangle = QBQ_c\sphericalangle = QBA\sphericalangle = CAQ\sphericalangle = Q_bAQ\sphericalangle = Q_bQ_cQ\sphericalangle,$$

és ugyanígy $QBC\sphericalangle = QAB\sphericalangle$-ből $QQ_cQ_a\sphericalangle = QQ_bQ_c\sphericalangle$. Eszerint a QQ_aQ_c és QQ_cQ_b háromszögek hasonlók, ebből $QQ_a : QQ_c = QQ_c : QQ_b$ és $QQ_a \cdot QQ_b = QQ_c^2$, amit bizonyítani akartunk.

Ezek szerint az előírt tulajdonságú pontok mértani helye az adott egyenlő szárú háromszög szárait az alap végpontjaiban érintő körnek az érintési pontok közé eső kisebb íve, az érintési pontokat nem számítva.

Megjegyzések. 1. Több versenyző kimondta és bebizonyította, hogy az említett kör minden pontjára nézve a száraktól mért távolságok mértani közepe egyenlő az alaptól mért távolsággal.

2. Többen trigonometriai számításokon keresztül jutottak arra, hogy az APB szög független a P pont helyzetétől.



3. feladat. *Adott a síkban két egységnyi sugarú, egymást érintő kör: k és k_1. Egyik közös külső érintőjük az „e” egyenes. Ezután rendre megrajzoljuk a $k_2, k_3, \ldots, k_n$ köröket úgy, hogy mindegyikük érintse k-t, e-t és az 1-gyel kisebb sorszámú kört. Mekkora a k_n kör sugara?*

Megoldás. Legyen k és k_1 középpontja O, O_1, e-vel való, valamint közös érintkezési pontjuk E, E_1, ill. T_1. Nyilvánvaló, hogy k_2 az EE_1 szakasszal és az ET_1, E_1T_1 negyedkörívekkel határolt síkrészben helyezkedik el, k-t és k_1-et kívülről érinti, és O_2 középpontja az E_1E szakasz felező merőlegesén van. k_2 sugarát r_2-vel, k-n, ill. e-n való érintési pontját T_2, ill. E_2-vel, és O_2-nek OE-n való vetületét O_2'-vel jelölve az OO_2O_2' derékszögű háromszögből

$$OO_2^2 = O_2O_2'^2 + OO_2'^2 = E_2E^2 + (OE - O_2'E)^2,$$

azaz

$$(1 + r_2)^2 = 1 + (1 - r_2)^2,$$

és így $r_2 = 1/4$.

Világos, hogy k_3 gyanánt nem k_1-et, hanem az EE_2 szakasszal és az ET_2, E_2T_2 ívekkel határolt síkrészben fekvő kört kell tekintenünk, és hogy a $k_4, k_5, \ldots, k_n$ körök is minden kisebb sorszámú körtől különbözők. Legyen a körsorozat két egymás utáni tagja k_i és k_{i+1}, sugaruk r_i, r_{i+1}, érintkezési pontjuk k-val, ill. e-vel T_i, T_{i+1}, E_i, E_{i+1}, középpontjuk O_i, O_{i+1}, és ennek vetülete OE-re O_i', ill. O_{i+1}', végül O_{i+1} vetülete O_iE_i-re O_{i+1}'' (az ábrán az $i = 2$ eset látható). Ekkor az OO_iO_i', $OO_{i+1}O_{i+1}'$, $O_iO_{i+1}O_{i+1}''$ derékszögű háromszögből:

$$EE_i = O_i'O_i = \sqrt{OO_i^2 - (OE - O_i'E)^2} = \sqrt{(1 + r_i)^2 - (1 - r_i)^2} = 2\sqrt{r_i},$$

ugyanígy

$$EE_{i+1} = 2\sqrt{r_{i+1}},$$

tehát

$$E_{i+1}E_i = O_{i+1}O_{i+1}'' = \sqrt{O_iO_{i+1}^2 - O_iO_{i+1}''^2} = \sqrt{(r_i + r_{i+1})^2 - (r_i - r_{i+1})^2} = 2\sqrt{r_ir_{i+1}}.$$

Ezekkel $EE_i = EE_{i+1} + E_{i+1}E_i$-ből

$$2\sqrt{r_i} = 2\sqrt{r_{i+1}} + 2\sqrt{r_ir_{i+1}},$$

és a jobb oldal második tagjával osztva

(3)
$$\frac{1}{\sqrt{r_{i+1}}} = \frac{1}{\sqrt{r_i}} + 1.$$

Innen $r_2 = 1/4$-del $r_3 = 1/9$, és ebből $r_4 = 1/16$. Az így adódott

(4)
$$r_i = \frac{1}{i^2}, \quad \frac{1}{\sqrt{r_i}} = i$$

sejtés teljes indukcióval azonnal igazolható; ha ugyanis (4) érvényes, akkor (3)-ból

$$\frac{1}{\sqrt{r_{i+1}}} = i + 1, \quad \text{tehát} \quad r_{i+1} = \frac{1}{(i+1)^2}.$$

Ezzel a feladat kérdésére a választ megkaptuk.

Bakos Tibor, Surányi János