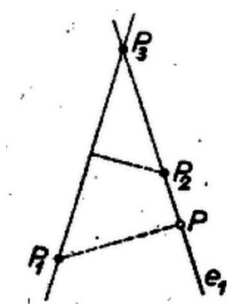
1. E kis cikkben egy elemi geometriai kérdéssel kapcsolatos megoldott és megoldatlan problémákról lesz szó. Remélem, sikerülni fog az olvasót meggyőznöm, hogy még az elemi geometria évezredek óta vizsgált területén is sok az új és egyszerű segédeszközökkel bizonyítható eredmény.

1933-ban olvastam *Hilbert–Cohn-Vossen*[1] „Anschauliche Geometrie" (szemléletes geometria) című szép könyvét. E könyv geometriai konfigurációkról szóló fejezetének olvasása közben a következő probléma jutott eszembe: Legyen adva a síkban n pont, melyek nincsenek mind egy egyenesen, akkor van oly egyenes, mely ezen n pont közül pontosan kettőn megy át. Úgy gondoltam, ez magától értetődő lesz, de nem tudtam bebizonyítani. Elmondtam e sejtést *Gallai Tibor*nak, aki hamarosan szép bizonyítást talált e tételre. 1936-ban az oslói nemzetközi matematikai kongresszuson *Karamata*[2] kérdezett e tételről, mondotta, hogy egy régi mechanika könyvben olvasta s ő sem tudta bebizonyítani. Elmondtam neki *Gallai* bizonyítását.

1943-ban kitűztem a problémát az *American Mathematical Monthly* c. folyóirat probléma-rovatában. Több érdekes megoldás érkezett, a legszebb *Kelly*é[3], mely még *Gallai*énál is szellemesebb, s melyet most közlök.



1. ábra

2. Legyenek az adott pontok $P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_n$. Kössük össze bármely két P_i-t. Így nyerjük az $e_1,\ \ldots,\ e_m$ egyeneseket. Minthogy a pontok nincsenek mind egy egyenesen, $m > 1$. Tekintsük mindegyik P_i távolságát mindegyik e_i -től, mely nem megy át P_i-n. Legyen ezen távolságok legkisebbike például P_1 távolsága e_1-től (a pontok és egyenesek számozása természetesen tetszőleges). Azt állítom, hogy az e_1 egyenesen pontosan két P_i van. Jelentse P a P_1-ből e_1-re bocsátott merőleges talppontját (1. ábra). Ha e_1-en három P_i lenne, akkor P valamelyik oldalán legalább két ily pont lenne, e pontok legyenek P_2 és P_3 úgy, hogy P_2 P és P_3 között van (esetleg P_2 P-vel egybeesik). Ekkor azonban világos, hogy P_2 távolsága a P_1P_3 egyenestől kisebb mint P_1P, a P_1 pont távolsága az e_1 egyenestől (tudniillik P_2 távolsága kisebb vagy egyenlő, mint a P_1PP_3 derékszögű háromszögnek az átfogóra bocsátott magassága, és P_1P nagyobb ennél), s ezzel *Gallai* tételét be is bizonyítottuk.

3. *Kelly* a probléma eredetét is megtalálta. 1893-ban *Sylvester*[4] közölte e problémát az *Educational Times* c., azóta megszűnt folyóiratban[5]. Megoldás e feladatra akkor nem érkezett, s nincs adat arra, vajon *Sylvester*nek volt-e megoldása problémájára, s így a tételt *Gallai* tételének nevezik. *Kelly* bizonyítását *Coxeter*[6] közölte[7].

1949-ben megismerkedtem *Motzkin*nal[8]. Elmondta, hogy 1933-ban (*Sylvester*ről s rólunk nem tudva) ő is felvetette e kérdést, s 1939-ben *A. Robinson*[9] bebizonyította a tételt.

4. *Gallai* tételével kapcsolatban számos további probléma merül fel. Hogy röviden tudjuk kifejezni magunkat, nevezzünk – ha adva van a síkban n pont, melyek nincsenek mind egy egyenesen –, közönséges egyenesnek egy olyan egyenest, mely e pontok közül pontosan kettőn megy át. *Gallai* tétele szerint mindig legalább egy közönséges egyenes van. Ha a pontok általános helyzetben vannak (nincs semelyik 3 egy egyenesen), a közönséges egyenesek száma[10] $\binom{n}{2}$. Ha $n-1$ pont van egy egyenesen, és az n-edik az egyenesen kívül, akkor a közönséges egyenesek száma $n-1$. Jelentse mármost $f(n)$ a közönséges egyenesek minimális számát. *De Bruijn*nel[11] sejtettük, hogy $f(n)$ n-nel együtt minden

[1] *David Hilbert* (1862–1943) a jelenkor egyik legkiválóbb matematikusa, főleg Göttingában működött. *S. Cohn-Vossen* német geométer, a hitlerizmus miatt emigrált s Leningrádban lett professzor, hol még a harmincas években elhunyt.

[2] *J. Karamata* jugoszláv matematikus, jelenleg a genfi egyetemen professzor. Főleg végtelen sorokra vonatkozó vizsgálatai tették ismertté.

[3] *L. M. Kelly* a Missouri-i egyetemen müködött, jelenleg East Lansingban, Michigan állam egyetemén professzor.

[4] *J. J. Sylvester* (1814–1897) kiváló angol matematikus, főleg számelmélettel s geometriával foglalkozott, az angliai oxfordi egyetemen, majd a *John's Hopkins University*-n (Baltimore, USA) működött. Ő alapította az első amerikai matematikai folyóiratot, a most is megjelenő *American Journal of Mathematics*-et.

[5] 11851. kérdés, 59. kötet 90. old.

[6] *H. S. M. Coxeter* kiváló kanadai geométer, a torontói egyetem professzora.

[7] American Mathematical Monthly 55 (1948) 26-28. oldal.

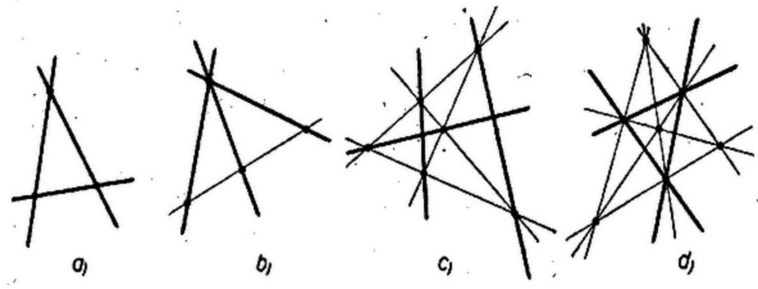
[8] *T. S. Motzkin* az USA-ban élő izraeli matematikus. Jelenleg Los Angelesben a californiai egyetemen professzor.

[9] *A. Robinson* jelenleg a jeruzsálemi héber egyetemen professzor.

[10] $\binom{n}{2}$-vel (olv. n a 2 fölött) jelölik az $n(n-1)/2$ számot. Ennyi pár alkotható n elemből; ugyanis mindegyik elem a többi $n-1$-gyel állítható párba, de az így megszámlált $n(n-1)$ pár közt mindegyiket kétszer vettük számításba (mindegyik eleménél). A későbbiekben szükségünk lesz az n elemből kiválasztható hármasok számára is. Minden elem a tőle különböző $n-1$ elemből alkotható $\binom{n-1}{2}$ párral összekapcsolva alkothat egy-egy hármast. Ilyen módon $n\binom{n-1}{2}$ hármast számoltunk meg, de minden hármast 3-szor vettünk tekintetbe, tehát a kiválasztható hármasok száma $\frac{n}{3}\binom{n-1}{2} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$. Ezt így szokás jelölni: $\binom{n}{3}$ (olv. n a 3 fölött).

[11] *N. G. de Bruijn* holland matematikus, munkatársam, kivel több közös cikkem van.

határon túl nő, vagyis akárhogy is adunk meg egy A egész számot, létezik egy csak A-tól függő $n_0 = n_0(A)$ szám úgy, hogy bárhogyan is adunk meg a síkban n_0-nál több pontot, amelyek nincsenek mind egy egyenesen, ezek legalább A közönséges egyenest határoznak meg.

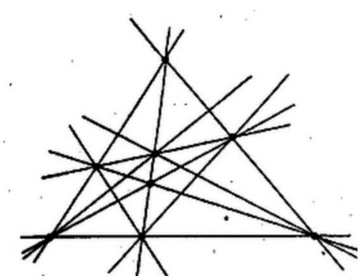


2. ábra

G. Dirac[12] bebizonyította, hogy $f(n) \geqq 3$. E becslés $n = 3$-ra, 4-re, 6-ra és 7-re pontos, amint azt a 2. ábra példái mutatják. *Motzkin* bebizonyította[13], hogy $f(n) > \sqrt{n}$, és ezzel sejtésünket igazolta. Legújabb időben *Kelly* és *Moser*[14] bebizonyították[15], hogy $f(n) \geqq \frac{3}{7}n$; ez megint pontos $n = 7$-re, nincs azonban kizárva, hogy n nagy értékeire a tétel még javítható, például igaz lehetne a következő sejtés: Létezik egy olyan n_0 egész szám, hogy ha $n > n_0$ és $P_1, \ldots, P_n$ tetszőleges n pont a síkban, melyek nincsenek mind egy egyenesen, akkor ezek legalább $n - 1$ közönséges egyenest határoznak meg. Ez azt jelentené: hogyha $n > n_0$, akkor $f(n) = n - 1$ (ti. már említettük, hogy ha $n - 1$ pont egy egyenesen van, akkor $n - 1$ közönséges egyenest nyerünk, s ezért minden n-re $f(n) \leqq n - 1$. *G. Dirac* sejtette, hogy $n > 7$ esetén $f(n) \geqq \frac{n}{2}$.

5. Még 1933-ban észrevettem, hogy *Gallai* tételéből következik, hogy ha a síkban n pont van adva, melyek nincsenek mind egy egyenesen, akkor ezek legalább n egyenest határoznak meg, azaz azon egyenesek száma, melyek e pontok közül legalább kettőn átmennek, nem lehet n-nél kisebb. A bizonyítás *Gallai* tételének segítségével könnyű (lásd az 1183. feladatot).

Nyilvánvaló, hogy e tétel pontos, ha ugyanis $n-1$ pont van egy egyenesen, s az n-edik pont nincs ezen az egyenesen, akkor e pontok nyilván n egyenest határoznak meg. Sejtettem, hogy ha az n pont olyan, hogy nincs közülük $n - 1$ sem egy egyenesen, és n elég nagy szám, akkor ezek legalább $2n - 4$ egyenest határoznak meg. Ez kis n-ekre, pl: $n = 6,\ 7,\ 8$-ra nem igaz. A 2. c), d) ábrán és a 3. ábrán $n = 6,\ 7,\ 8$ pont esetén rendre 7, 9, ill. 11 egyenest látunk, $2n - 4$ pedig ezekre az n-ekre 8, 10, ill. 12. *Kelly* és *Moser* a már idézett cikkükben[15] a következő általános tételt bizonyítják be:


3. ábra

Tegyük fel, hogy az n pont olyan, hogy legfeljebb $n - k$ van közülük egy egyenesen, tegyük fel továbbá, hogy

$$n \geqq \frac{1}{2}\left[3\,(3k-2)^2 + 3k - 1\right], \tag{1}$$

akkor az n pont legalább

$$kn - \frac{1}{2}\,(3k+2)\,(k-1) \tag{2}$$

egyenest határoz meg. Nem feltétlenül határoznak meg a pontok (2)-nél több egyenest, mint ezt a szerzők következő példája mutatja: $P_1, \ldots, P_k$ legyen k pont a síkban úgy, hogy nincs közülük három egy egyenesen, e a sík egy

[12] *G. Dirac* magyar származású angol matematikus, a világhírű angol fizikus, *P. Dirac* fogadott fia.

[13] *Th. Motzkin*, The lines and planes connecting the points of a finite set. Transactions of the American Mathematical Society 70 (1951) 451–464. *Motzkin Gallai* tételének érdekes többdimenziós általánosításait is tárgyalja.

[14] *W. O. J. Moser* kanadai matematikus, a manitobai egyetemen, Winnipegben professzor.

[15] *L. M. Kelly* and *W. O. J. Moser*, On the number of ordinary lines determined by n points, Canadian journal of Mathematics, 10 (1958) 210-219.

tetszőleges egyenese, mely a P_i, $1 \leqq i \leqq k$ pontok egyikén sem megy át. A $(P_i;\ P_j)$ $1 \leqq i,\ j \leqq k$ egyenesek – számuk $\binom{k}{2}$ – az e egyenest a $P_{k+1},\ \ldots,\ P_{k+\binom{k}{2}}$ pontokban metszik. A többi $n - k - \binom{k}{2}$ pontot az e egyenesen tetszőlegesen vesszük fel. Könnyű belátni, hogy ez az n pont

$$1 + k\,(n-k) - \binom{k}{2} = kn - \frac{1}{2}\,(3k+2)\,(k-1)$$

egyenest határoz meg.

Legyen mármost $k = 2$. – (1) és (2) igazolja sejtésemet, ha $n \geqq 27$. *Kelly* és *Moser* kimutatták, hogy sejtésem $n = 10$-re is igaz (azaz 10 pont, melyek közül nincs 9 egy egyenesen, legalább 16 egyenest határoz meg), s sejtik, hogy a $11 \leqq n \leqq 26$ értékekre is igaz. Bebizonyították továbbá, hogy ha $n = 7,\ 8, 9$, akkor legalább $2n-5$ egyenest nyerünk, s láttuk (2. c), d) ábra és 3. ábra), hogy $2n-5$ nem is javítható.

6. *Kelly* és *Moser* eredményei azonban még nem intézik el teljesen az itt felmerülő problémákat. Nyilvánvaló pl., hogy létezik egy oly c_k szám, hogy ha adva van n pont, melyek közül legfeljebb $n-k$ van egy egyenesen, akkor e pontok legalább $c_k kn$ egyenest határoznak meg, például vehetjük c_k-t $1/k$-nak. (2)-ből c_k-ra ennél lényegesen jobb becslést kaphatunk, de különböző k-ra különböző c_k értékeket. A kérdés azonban az, hogy van-e oly c szám, mely minden k-ra jó. Azaz valószínűleg igaz a következő sejtés: Létezik oly c állandó, (mely nem függ sem k-tól, sem n-től), hogy ha az n pont közül legfeljebb $n-k$ van egy egyenesen, akkor a fellépő egyenesek száma nagyobb, mint ckn (feltehető, hogy a sejtés igaz, ha $c = 1/10$).

Említsük meg még *Dirac* következő sejtését: Legyen $P_1,\ \ldots,\ P_n$ n pont a síkban, melyek nincsenek mind egy egyenesen, akkor mindig van egy pont P_i úgy, hogy a $(P_i; P_j)$, $1 \leqq j \leqq n$, $i \neq j$ egyenesek közül legalább $\left[\frac{n}{2}\right]$ különböző van.

Megemlítjük még, hogy *Sylvester* a következő kérdést vizsgálta: Legyen adva n pont, $P_1, P_2, \ldots, P_n$ a síkban. Maximálisan hány olyan egyenes lehetséges, mely e pontok közül pontosan hármon megy át? Kimutatta, hogy $n = 9$-re e maximum 10. Könnyű belátni, hogy általában n-re e maximum nem nagyobb, mint $\frac{1}{3}\binom{n}{2}$ (ennyi volna, ha minden P_iP_j egyenesen 3 pont volna) és *Gallai* tétele miatt e maximum semmilyen n-re nem érheti el az $\frac{1}{3}\binom{n}{2}$ értéket. Páros n-re e maximum legfeljebb $\frac{1}{3}\binom{n}{2} - \frac{n}{6}$. (Ez abból látható be, hogy minden ponton kell olyan egyenesnek átmennie ez esetben, amin páros számú P_i pont van.) E tételek részletes bizonyítását az olvasóra bízom. Nagyon meglepő azonban, hogy *Sylvester* kimutatta, hogy e maximum nagyobb, mint $\frac{1}{3}\binom{n}{2} - cn$, ahol c alkalmas, n-től nem függő állandó. Kérdezhetjük még azt is, hogy mekkora azon egyenesek maximális száma; amelyek az n pont közül pontosan négyen mennek át. Ezt csak n speciális értékeire vizsgálták, és én azt hiszem, hogy nagy n-re e maximum sokkal kisebb nagyságrendű lesz, mint n^2, talán kisebb, mint cn, egy alkalmas c állandóval.

7. Most rátérek e kérdések kombinatorikus általánosításaira. Legyenek $a_1, \ldots, a_n$ elemek, $A_1, \ldots, A_m$ az elemekből alkotott, legalább kételemű csoportok (szokásos szakkifejezéssel halmazok). Feltesszük, hogy minden $(a_i; a_j)$ pár egy és csakis egy A_i-ben fordul elő. Ha az a_i-k pontok, és az A_j-k azon egyenesek, melyek e pontok közül legalább kettőn átmennek, akkor nyilván e feltételt kielégítő rendszert kapunk. Azonban könnyű belátni, hogy lehet olyan a_i, $1 \leqq i \leqq n$, A_j, $1 \leqq j \leqq m$ rendszert csinálni, mely nem valósítható meg, mint a sík pontjai és egyenesei. Legyen ugyanis $n = m = 7$, és az A-k: (a_1, a_2, a_3), (a_1, a_5, a_6), (a_1, a_4, a_7), (a_2, a_4, a_6), (a_2, a_5, a_7), (a_3, a_4, a_5), (a_3, a_6, a_7). E rendszer nyilván nem valósítható meg a síkban, ti. e rendszernek nincsen közönséges egyenese, azaz nincs oly A_j, mely pontosan két a_i-t tartalmaz.

Ennek ellenére fennáll a követező tétel: Ha $m > 1$, akkor $m \geqq n$ – azaz ha az A-k száma nagyobb, mint egy, akkor legalább n A van. Ez lényeges általánosítása annak a tételnek, hogy n pont a síkban, ha nincs mind egy egyenesen, legalább n egyenest határoz meg.

E tételt *Hanani*[16] bizonyította be először 1938-ban. Én *Hanani* eredményéről nem tudva, 1941-ben újra felfedeztem e tételt, melyet *Szekeres*[17] is bebizonyított. A legegyszerűbb bizonyítás *de Bruijn*-től való, melyet most közlök.

8. Két elem a_{i_1} és a_{i_2} nyilván egyértelműen meghatároz egy A halmazt, éspedig azt, amely az $(a_{i_1}; a_{i_2})$ párt tartalmazza. Feltevésünk szerint egy és csakis egy ily A van. Hogy röviden tudjam magam kifejezni, az a_i elemeket pontoknak fogom nevezni s az A_j halmazokat utaknak.

Jelöljük az a_i ponton átmenő utak számát k_i-vel, az A_j úton levő pontok számát s_j-vel. Nyilván $1 < k_i < n$, és $1 < s_j < n$, minthogy a pontok nincsenek mind egy út mentén, és minden úton legalább két pont van.

A k_i-k és s_j-k közt könnyen találhatunk egy összefüggést p1. a következő szemléletes meggondolással: képzeljük az utakat villamosvonalaknak, amelyeknek minden pontban (kereszteződésnél) megállójuk van [18]. Egy alkalommal minden vonalon végighaladt egy villamos, és mindegyikre minden megállónál egy utas szállt fel. Ekkor az a_i kereszteződésnél

[16] *H. Hanani* izraeli matematikus, kollégám a haifai műegyetemen.

[17] *Szekeres György* Ausztráliában működő magyar matematikus.

[18] Az a_i-k és A_j-k mindig szemléltethetők ilyen (általában nem egyenes) villamosvonalakkal. Ezeknek esetleg a kijelölt pontokon kívül is lesz kereszteződésük, de mi csak a kijelöltekkel foglalkozunk.

k_i felszálló volt, az A_j vonalon s_j utas utazott, tehát az összes utasokat egyrészt útvonalak, másrészt állomások szerint összeszámolva a következő azonosságot kapjuk:

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_n = k_1 + k_2 + \ldots + k_n. \tag{3}$$

Feltehetjük, hogy a pontok a rajtuk átmenő utak csökkenő száma szerint vannak rendezve, tehát

$$k_n \leqq k_i, \quad \text{ha} \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{4}$$

továbbá, hogy az a_n-en az $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_{k_n}$ utak mennek át. Jelöljük k_n-et, miután sok szó lesz még róla, rövidebben v-vel.

Keressünk összefüggéseket a k-k és s-ek közt. Ha az A_j út nem megy át az a_i ponton, akkor a_i-t A_j minden egyes pontjával más-más út köti össze, mert különben volna két olyan út, amelyek két különböző pontban találkoznak, pedig feltettük, hogy ilyen nincs. Így, ha A_j nem megy át a_i-n, akkor

$$k_i \geqq s_j. \tag{5}$$

Ezt alkalmazhatjuk k_n és $s_{v+1},\ s_{v+2},\ \ldots,\ s_m$-re:

$$k_n \geqq s_j \qquad (j = v+1,\ v+2,\ \ldots,\ m).$$

Ezeket összeadva

$$(m - v) k_n \geqq s_{v+1} + s_{v+2} + \ldots + s_m. \tag{6}$$

Az $s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_v$-t is tudjuk becsülni k-kkal (5) alapján, ugyanis A_1 átmegy egy a_n-től különböző ponton – feltehetjük, hogy ezt jelöltük a_1-gyel –, mert minden út legalább két ponton halad át. Ekkor $A_2,\ \ldots,\ A_v$ nem mehet át a_1-en, mert két út legfeljebb egy pontban találkozik, így (5) szerint fennáll pl.

$$k_1 \geqq s_2.$$

De A_2 is átmegy egy a_n-től (és a_1-től) különböző ponton, mondjuk a_2-n. Ezen $A_3,\ \ldots,\ A_v$ nem megy át, tehát pl.

$$k_2 \geqq s_3.$$

Hasonlóan haladva tovább, végül az A_{v-1}-en találunk egy a_n-től különböző a_{v-1} pontot, amelyen A_v nem megy át, A_v-n pedig egy a_v pontot, amin az előző A_i-k, p1. A_1 nem megy át. Így (5) alapján a következő egyenlőtlenségeket kapjuk:

$$k_1 \geqq s_2, \quad k_2 \geqq s_3, \ldots, \quad k_{v-1} \geqq s_v, \quad k_v \geqq s_1.$$

Ezeket összeadva és hozzájuk adva (6)-ot, azt kapjuk, hogy

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_v + (m - v)\, k_n \geqq s_1 + s_2 + \ldots + s_m.$$

Írjuk itt be a jobb oldal helyébe (3) jobb oldalát, majd alkalmazzuk $k_{v+1},\ k_{v+2},\ \ldots,\ k_n$-re (4)-et, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 + \ldots + k_v + (m - v)\, k_n &\geqq k_1 + k_2 + \ldots + k_n \geqq \\ &\geqq k_1 + k_2 + \ldots + k_v + (n - v)\, k_n. \end{aligned}$$

Innen

$$(m - v)\, k_n \geqq (n - v)\, k_n,$$

és mivel $k_n > 1$,

$$m \geqq n.$$

Ezzel bebizonyítottuk *Hanani* tételét.

9. Az egyenesekre tárgyalt problémához hasonlóak körökkel kapcsolatban is felmerülnek. Érvényes *Gallai* tételének következő általánosítása: Legyenek adva a síkban a $P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_n$ pontok ($n > 3$), amelyek nincsenek mind egy körön, akkor van olyan kör, amelyik pontosan három P_i-n megy át. A tétel (mely említve van a [13] lábjegyzetben idézett cikkben), *Gallai* tételéből könnyen következik az inverzió, más néven körre vonatkozó tükrözés nevű transzformáció segítségével.[19] Tegyük fel ugyanis, hogy a tétel nem volna igaz. Ekkor volna egy olyan pontrendszer, amelynek bármely három pontján átmenő kör egy negyedik P_i-n is átmenne, így többek közt minden $(P_1,\ P_i,\ P_j)$ ponthármason átmenő kör átmenne egy negyedik P_k ponton is. Alkalmazzunk ekkor inverziót egy P_1 középpontú körre, a P_i pont képét jelöljük Q_i-vel ($i = 2,\ 3,\ \ldots,\ n$). Ebben a pontrendszerben a Q_iQ_j egyenes a $P_1,\ P_i,\ P_j$ pontokon átmenő kör

[13]

[19] Ez a sík egy olyan átalakítása, amelynél egy adott kör pontjai helyben maradnak, a kör középpontjának nincs megfelelője, és minden ezen a középponton átmenő kör egy egyenesbe megy át.

képe, s így feltétel szerint átmegy legalább még egy Q_k ponton. Ez azonban *Gallai* tétele szerint csak úgy lehet, ha $Q_2, Q_3, \ldots, Q_n$ mind egy egyenesen van, de ez az egyenes akkor egy P_1-en is átmenő kör képe volna, holott feltétel szerint nincs az összes P_i egy körön. Lehetetlenségre jutottunk, kell tehát, hogy a körökre vonatkozó tétel is igaz legyen.

Nem látszik azonban könnyűnek a következő kérdés, melyet évekkel ezelőtt felvetettem: Legyen adva n pont a síkban, melyek nincsenek mind egy körön. Tekintsük az összes köröket, melyek a pontok közül hármon átmennek. Igaz-e, hogy így legalább $1+\binom{n-1}{2}$ kört kapunk? Ha $n-1$ pont egy körön van, akkor pontosan $1+\binom{n-1}{2}$ kört kapunk.

A megfelelő kombinatorikus általánosítás így hangzik: Legyen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ n elem, $A_1, \ldots, A_m$, $m>1$ az a-kból alkotott legalább három elemű halmazok úgy, hogy mindegyik az a_i-kből álló hármas egy és csakis egy A-ban fordul elő. Mekkora m minimális értéke? – A párok esetén a geometriai és a kombinatorikus probléma megoldása, amint láttuk, ugyanaz volt, minimális értéke mindkét esetben n. Valószínű azonban, hogy ternók (három elemű halmazok) esetén m minimuma a kombinatorikus esetben kisebb, mint a geometriai problémánál. *Hanani* bebizonyította a következőt: Adjunk meg tetszőlegesen egy kis ε pozitív számot; ehhez mindig található egy n_0 úgy, hogy ha $n>n_0$, és adva van n elem, $a_1, a_2, \ldots, a_n$, akkor m értéke a kombinatorikus problémánál kielégíti a következő egyenlőtlenséget:

$$m>(1-\varepsilon)\frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt[4]{8}}. \tag{7}$$

Hanani bizonyítása, mely eddig még nem jelent meg nyomtatásban, a következő: Legyen az A_i halmaz elemeinek a száma s_i. Feltehetjük, hogy a halmazokat pl. a bennük levő elemek száma szerint csökkenő sorrendbe rendeztük, tehát

$$s_1 \geqq s_2 \geqq \ldots \geqq s_m.$$

Az összes hármasok száma, amiket az n elemből képezhetünk,

$$\binom{n}{3}=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

Ezek mindegyike előfordul egy halmazban és csak egyben, viszont az i-edik halmazban

$$\binom{s_i}{3}=\frac{s_i(s_i-1)(s_i-2)}{6}$$

hármas fordul elő, így

$$\binom{n}{3}=\binom{s_1}{3}+\binom{s_2}{3}+\ldots+\binom{s_m}{3}\leqq m\binom{s_1}{3},$$

amiből

$$m \geqq \frac{\binom{n}{3}}{\binom{s_1}{3}}=\frac{n(n-1)(n-2)}{s_1(s_1-1)(s_1-2)}>\frac{n^3}{s_1^3},$$

minthogy $s_1<n$ miatt $\frac{n}{s_1}<\frac{n-1}{s_1-1}<\frac{n-2}{s_1-2}$. Ebből következik (7) abban az esetben, ha

$$s_1 \leqq \sqrt[4]{2}\sqrt{n}=\sqrt[4]{2n^2}.$$

Arra az esetre, ha s_1 ennél nagyobb érték, gondoljuk meg mindenek előtt, hogy A_1 elemei közül egyrészt a többi A_i mindegyike legfeljebb 2-t tartalmazhat, mert minden hármas csak egy A_i-ben fordul elő, másrészt minden A_1-ben szereplő elempár legalább még egy A_i-ben előfordul, mert különben a kérdéses elempárból és egy A_1-ben nem szereplő elemből álló hármasok egy halmazban sem szerepelnének. Mivel A_1 elemeiből $\binom{s_1}{2}$ pár képezhető, így A_1-en kívül legalább még ennyi halmazunk van:

$$m \geqq 1+\binom{s_1}{2}>\frac{s_1(s_1-1)}{2}=\frac{s_1^2}{2}\left(1-\frac{1}{s_1}\right).$$

Ez abban az esetben adja (7)-et, ha s_1 elég nagy, és n elég nagy; pl. ha $s_1 \geqq \sqrt[4]{2n^3}$, akkor

$$m>\frac{\sqrt[4]{2n^3}\left(\sqrt[4]{2n^3}-1\right)}{2}=\frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{\sqrt[4]{2n^3}}\right);$$

s így teljesül (7), ha n elég nagy (pl. ha $\frac{1}{\sqrt[4]{2n^3}}<\varepsilon$, tehát $n>\sqrt[3]{\frac{1}{2\varepsilon^4}}$..

Ha végül

$$\sqrt[4]{2n^2} < s_1 < \sqrt[4]{2n^3}, \tag{8}$$

akkor vizsgáljuk meg azt is, hány halmazban kell egy A_1-beli elempárnak előfordulnia ahhoz, hogy minden hármas szerepelhessen, amely ebből a párból és még egy, A_1-ben nem szereplő elemből áll.

Egy-egy A_1-beli párból $n - s_1$ számú ilyen hármas alkotható, mert ennyi elem nem szerepel A_1-ben. Másrészt egy A_i-nek, amely két A_1-beli elemet tartalmaz, emellett legfeljebb $s_1 - 2$ további eleme lehet, mert nem lehet s_1-nél több eleme. Így ahhoz, hogy egy A_1-beli párt tartalmazó összes hármas előfordulhasson, ennek a párnak A_1-en kívül még legalább $\dfrac{n-s_1}{s_1-2}$ halmazban kell előfordulnia. Mivel A_1 elemeiből $\dbinom{s_1}{2}$ pár alkotható, így

$$m \geqq 1 + \binom{s_1}{2}\frac{n-s_1}{s_1-2} > \frac{s_1(s_1-1)(n-s_1)}{2(s_1-2)} > \frac{s_1(n-s_1)}{2} = \\ = \frac{\frac{n^2}{4} - \left(\frac{n}{2} - s_1\right)^2}{2}.$$

A (8) feltételnek eleget tevő s_1 értékek kisebbek $n/2$-nél, ha $n \geqq 32$, az ilyen n-ekre tehát csökkentjük a nyert kifejezés értékét, ha s_1-et nála kisebb számmal helyettesítjük. Eszerint a (8) alatti s_1 értékekre (a nyert korlát jobban kezelhető utolsó előtti alakját használva)

$$m > \frac{\sqrt[4]{2n^2}\left(n - \sqrt[4]{2n^2}\right)}{2} = \frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt[4]{8}} - \frac{n}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt[4]{8}}\left(1 - \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{n}}\right).$$

Ezek szerint a (8) feltételnek eleget tevő s_1 értékekre is teljesül (7), amint n elég nagy $\Bigg($ egyrészt $n \geqq 32$, másrészt $\dfrac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{n}} < \varepsilon$, azaz
Az n-re adódott korlátok közül a legnagyobbat választva n_0-nak, bármekkora is s_1, mindig teljesül (7), amint $n > n_0$. Ezzel *Hanani* tételét bebizonyítottuk.

Hanani azt is bebizonyította, hogy ha $n = u^2 + 1$, ahol u prímszámhatvány, akkor

$$m \leqq u\left(u^2+1\right)\left[= n\sqrt{n-1}\right]. \tag{9}$$

Hanani sejti, hogy itt $m = u(u^2+1)$. (7) és (9)-ből az analitikus számelmélet eszközeivel könnyen belátható, hogy a kombinatorikus problémánál m minimumának nagyságrendje $n^{3/2}$, pontosabban minden pozitív ε-hoz van oly n_0, hogy ha $n > n_0$, akkor

$$(1-\varepsilon)\,2^{-3/4}n^{3/2} < m < (1+\varepsilon)\,n^{3/2}. \tag{10}$$

(10) bal oldalát már bebizonyítottuk, a jobb oldallal itt nem foglalkozhatunk. E problémákat hármasokról l-esekre is általánosíthatjuk minden $l > 3$ esetén, de ezzel most nem foglalkozunk.

Erdős Pál