Észrevéve, hogy $30621 = 173 \cdot 177$, és bevezetve a $177 = a$, $173 = b$ rövid jelöléseket, számaink

$$\begin{aligned} A &= a^5 + ab^4 - b^5, \\ B &= b^5 + a^4 b - a^5, \\ C &= a^4 + a^2b^2 + b^4, \end{aligned}$$

eszerint B az A-ból adódik a és b felcserélésével. Ez a felcserélés C-t önmagába viszi át, ezért elég lesz A és C kérdését vizsgálnunk.

C így alakítható:

$$(a^2+b^2)^2 - a^2b^2 = (a^2+b^2-ab)(a^2+b^2+ab), \tag{1}$$

ennek alapján a két tényezőre külön-külön vetjük fel az A-val való legnagyobb közös osztó kérdését.

Kézenfekvő kérdés, van-e olyan M, N, az a-tól és b-től nem függő együttható-pár, hogy a-nak és b-nek

$$a^3 + Ma^2b + Nab^2 - b^3$$

polinomját C első tényezőjével szorozva A-t kapjuk. Ez teljesül, ha A-ban és a szorzatban az egynevű tagok együtthatói rendre egyenlők (amit a^5 és b^5 együtthatóira már biztosítottunk a^3, ill. b^3 együtthatójának megválasztásával), azaz

$$\begin{array}{lll} a^4b & \text{együtthatóiból} & 0 = M - 1, \\ a^3b^2 & \text{együtthatóiból} & 0 = N - M + 1, \\ a^2b^3 & \text{együtthatóiból} & 0 = -1 - N + M, \\ ab^4 & \text{együtthatóiból} & 1 = 1 + N. \end{array}$$

Könnyű látni, hogy van megoldás: $M = 1$, $N = 0$, tehát A osztható $a^2 - ab + b^2$-nel, a hányados $a^3 + a^2b - b^3$; tovább ennek és C **(1)**-beli második tényezőjének közös osztóját keressük.

Ismert azonosság alapján a hányados

$$(a^3 - b^3) + a^2b = (a-b)(a^2+ab+b^2) + a^2b,$$

eszerint ha létezik a most mondott közös osztó, az osztója a jobb oldal utolsó tagjának, a^2b-nek is. Ennek osztói (mivel feladatunkban a és b relatív prímek, hiszen b prím és nem osztója a-nak) b és a^2 osztói. Ámde b-nek nincs 1-nél nagyobb közös osztója a^2+ab+b^2-nel, mert ab-nek és b^2-nek osztója b, de a^2 nem osztható b egyetlen 1-nél nagyobb osztójával sem, másrészt a^2-nek sincs 1-nél nagyobb közös osztója a^2+ab+b^2-nel, mert az utolsó két tag összege $b(a+b)$, ahol b prím és $a+b$ relatív prím b-hez is, a-hoz is, tehát a^2-hez is.

Ezek szerint A és C legnagyobb közös osztója $a^2 - ab + b^2 = 177^2 - 30621 + 173^2 = 30637$, és ugyanez a legnagyobb közös osztója a B, C számpárnak is A és B fent említett (felcserélési) kapcsolata alapján, hiszen a és b felcserélése $a^2 + ab + b^2$-t nem változtatja meg, és a^2b-re végzett meggondolásunk lényegében véve megismételhető b^2a-ra.

Horváth András (Budapest, I. István Gimn., III. o. t.)