Lapunk 154. feladatának megoldásai indokolttá teszik, hogy a mechanika egyik alapvetően fontos problémájával, a gravitációs erőtérben való szabad mozgással foglalkozzunk. Az alábbiakban feltételezzük, hogy az olvasó előtt a gravitációval és a körmozgással kapcsolatos középiskolai anyagrészek ismeretesek. Vizsgálni fogjuk speciális esetben a gravitációs erőtérben mozgó, két testből álló szabad pontrendszer viselkedését, ha a rendszer tagjai között belső erők hatnak. A feladat problémafelvetésének megfelelően legyen az erőtér forrása kizárólag a Nap, és a pontrendszer álljon a Föld és a hajó pontoknak tekinthető testjeiből. Vizsgálatunk tárgya: a hajó súlyának megváltozása speciális esetekben. A 154. feladat első részének kérdései: Mikor könnyebb a hajó, délben vagy éjfélkor? Hány ponddal könnyebb a hajó, ha a tömege $m_h = 15 \cdot 10^3$ tonna? Vizsgáljuk meg a hajó súlyát délután 6 órakor is!

Első pillanatra látszik, hogy itt az ár–apály jelenséggel kapcsolatos problémával állunk szemben. Aki ismeri az ár–apály jelenséget, tudja, hogy a „dagály" nemcsak a Föld egyik felén következik be, hanem azzal egyidőben a Föld átellenes részén is. A mi feladatunk helyes megoldásának kulcsa azonos a most említett ár–apály jelenség megoldásának magyarázatával is. Nézzük meg közelebbről.

A 154. feladat első kérdésére a válasz *első közelítésben* (kis elhanyagolásokkal) igen egyszerű, de ugyanakkor igen váratlan: a hajó súlya éppen akkora délben, mint éjfélkor, vagyis súlyváltozás nincs! Hogy ezt belássuk, menjünk végig az alábbi gondolatmeneten. Határozzuk meg először is, hogy mit értünk a hajó súlyán. Több beérkezett dolgozattal ellentétben nem a hajóra ható összes gravitációs erők eredője a hajó súlya, hanem az az erő, amellyel a hajó a Földet (vizet) nyomja. A későbbiek során belátjuk, hogy ez a két dolog nem ugyanaz. A hajó így definiált súlyát mérhetjük pl. egy olyan rugós erőmérővel, melynek egyik vége a Földhöz van mereven rögzítve, a másik végére helyezzük a hajót.

A déli és éjféli súlyok közötti különbség meghatározására hibás az a következtetés, amely szerint, mivel délben a Nap felfelé vonzza a hajót, éjfélkor pedig lefelé, egyszer levonódik, másszor hozzáadódik ez a vonzás a hajónak a Föld okozta súlyához, vagyis délben könnyebb, éjfélkor nehezebb lesz a hajó. (Akkor lenne így, ha a Föld az égen rögzítve lenne.) Ez a következtetés figyelmen kívül hagyja azt a tényt, hogy *a Nap a Földet is épp úgy vonzza, mint a hajót,* aminek következtében a Nap gravitációs erőterében *mindketten egyformán gyorsulnak a Nap felé,* s így a Nap vonzó hatása nem járul hozzá a hajó súlyának kialakításához! Szemléletesen: amennyire gyorsítja maga felé a Nap délben a hajót, ugyanannyira gyorsítja a Földet is. Éjfélkor ugyanez érvényes fordított irányokkal: amennyivel növeli a Nap a hajóra ható földi g-t, ugyanannyival hat magára a Földre is; mintegy „kigyorsítja" a Földet a hajó alól. Súlycsökkenés tehát nincs: szabadon mozgó (az erőtér hatására minden részében egyforma gyorsulást szenvedő) rendszer tagjai között fellépő ún. belső erőket nem befolyásolja a rendszer minden tagjára egyformán ható külső erőtér!

Nehézséget okozhat a kezdő számára, hogy a Föld pályamozgása során nem közeledik valóban a Naphoz, s így nem látszik elég szemléletesen a Nap felé irányuló gyorsulás, amelyben a Föld és a hajó egyformán részt vesz, s amire gondolatmenetünket alapoztuk. Valóban, a feladatnak ez az egyik legszebb, fizikus szemléletet követelő pontja: felismerni, hogy a gyorsulás független a mozgás irányától, és hogy a „pályagörbítő" (mozgás irányára merőleges, tehát sebességet nem növelő) gyorsulás egyenértékű a szabadesés gyorsulásával!

Képzeljük el könnyebbség kedvéért a következőket: a hatodik emeleten drótkötélhez rögzített liftszekrényben áll egy asztal, és ezen az asztalon két test van elhelyezve egymás felett, s ezeket valamilyen erő, pl. rugó szorítja össze. Ekkor az asztalon fekvő testet a rajta levő test saját súlyánál fogva *valóban nagyobb erővel nyomja* mint a közöttük ható egyéb vonzó erő. Ez a helyzet a szilárdan *rögzített asztalon.* Vágjuk most el a liftet tartó drótkötelet. Ekkor a lift szabadon kezd zuhanni a jól ismert g nehézségi gyorsulással. Nyilvánvaló, hogy ekkor már nem nyomja a liftben azzal együtt szabadon eső felső test az alatta levőt, csak a köztük ható rugó erejével, mert most a lift is, az asztal is, az alsó és felső test is egymás mellett szabadon esnek, *egyformán gyorsulnak a Föld hatására.* Nem változtat ezen a tényen az sem, ha liftünknek valami módon egy vízszintes irányú kezdősebességet adunk. Ekkor a mozgás két részből tevődik össze, egy vízszintes irányú egyenletes mozgásból és egy szabadesésből, aminek eredménye mindössze az, hogy a pálya parabola lesz, ami a szabadesés gyorsulását, tehát a rendszer belső erői viszonyának alakulását nem befolyásolja. Ha pedig igen nagyra választjuk ezt a vízszintes kezdősebességet, elérünk egy olyan határhoz, amelynél a nagy távolságok berepülése miatt már a Föld *centrális erőterével* kell számolnunk (nem tekinthetjük többé homogénnek), s az elhajított rendszer az *ellipszis pályák* egyikét írja le. Végül – s most érkeztünk feladatunk esetéhez – ha a „vízszintes" sebesség elér egy kritikus értéket, az ún. „körsebesség" (Föld körül elhajított test esetén az „első kozmikus sebesség") értékét,a rendszer a *szabadesés gyorsulásának megléte mellett* már állandó *körpályán* fog keringeni. Szemléletesen: hiába görbül a pálya, nem éri el többé a körülkeringett égitestet. Ekkor a *szabadesés gyorsulása* mint a körmozgás *centripetális gyorsulása* lép fel, amely – mint láttuk – lényegileg ugyanolyan *szerepet* játszik, mint a szabadon eső lift esetében a benne levő testek kölcsönhatására vonatkozóan: *azaz nem befolyásolja azokat!* A Nap vonzó ereje azonos centripetális gyorsulásra kényszeríti Földünket a rajta levő hajóval együtt. A feladat első kérdésére adandó válasz tehát első megközelítésben az, hogy a hajó súlya *egyenlő minden napszakban.*

Vizsgáljuk meg most, hogy mennyire pontos ez a megállapítás, mennyire teljesülnek azok a feltételek, amelyeket kihasználtunk gondolatmenetünk alatt?

Lényeges része volt kiindulásunknak az, hogy *a rendszer minden tagjára egyformán ható* erőtérrel számoltunk. Mennyire valósul meg feladatunk esetében ez a feltevés? Ez akkor igaz, ha az erőtérnek az a része, ahol a vizsgált testek vannak, *homogén.* Így van-e ez a feladatunkban? Igen nagy pontossággal így. A Nap $150 \cdot 10^6$ km távolsága a földsugár 6370 km-es hosszához képest igen nagy, így az erővonalak majdnem párhuzamosak, a tér homogénnek tekinthető. (Gondoljunk a Napból érkező fénysugarak „párhuzamosságára". $\operatorname{tg}\alpha < 8{,}6 \cdot 10^{-5}$! Rajztáblán vonalzóval gondosan kihúzott párhuzamos vonalak általában jobban eltérnek a párhuzamostól, mint a Nap erőterének a Föld tartományán keresztül haladó erővonalai!) A kérdés gyakorlati részét tehát elintéztük. Ám ár–apály jelenség mégis van; kérdés, mi okozza ilyen körülmények mellett ezt a jelenséget? Finomítsuk vizsgálatunkat, és nézzük meg az elhanyagolásmentes helyzetet, midőn az erőtér kicsiny *inhomogenitását* is figyelembe vesszük.

Az ember az előzőek után már gyanakvó, és könnyen azt hinné, hogy inhomogén térben sem lesz különbség a két helyzetbeli súly között, mert igaz, hogy délben más, mégpedig nagyobb vonzóerővel hat a Nap a hozzá közelebb eső hajóra, mint a Földre, éjfélkor viszont a Földre hat nagyobb vonzó erővel, mint a távolabbi hajóra, csakhogy közben fordult egyet a Föld, s így a déli és éjféli helyzetek között súlykülönbség megint nem lesz, mert *mindkét hatás egyformán „könnyítő”*. Szemléletesen: amennyivel nagyobb átlagos térerősségű térrészben van a hajó délben, mint a Föld, annyival nagyobb erősségű térben lesz a Föld éjfélkor, mint a hajó, s így a hajó és a Föld gyorsulásának különbsége végül is kiegyenlítődik.(Egyszer a hajót gyorsítja el a Nap a Földtől, másszor pedig a Földet a hajótól, ami lényegében ugyanaz.) A kétkedés jogos,mert a helyzet valóban ez, de ismét csak első megközelítésben. Ha tovább fokozzuk megfigyelésünk pontosságát, észre kell vennünk, hogy – bár igen kis mértékben – a hajó tömegközéppontja és a Föld tömegközéppontja helyén uralkodó térerősségek különbsége más délben, mint éjfélkor, mert míg a Föld fél nap alatt közelítőleg állandó távolságban tartózkodik a Naptól, a hajó egy földátmérővel távolabb került a Naptól éjszakára. Mivel pedig a térerősség $1/R^2$ függvényében csökken, így a *nem lineáris változás* miatt a déli térerősségkülönbség és az éjféli térerősségkülönbség között különbség lesz, *nem rontják le pontosan egymást!* (A Földre és hajóra ható, Napból származó gravitációs erők különbsége egy kicsit más lesz délben, mint éjfélkor.) Így az *inhomogenitás nemlineáris volta* okoz csak súlykülönbözetet!

Több megoldó R mellett elhanyagolta r-et, a földsugarat. Fizikailag eleve rossz eredményt kapott, mert ezzel elvileg egy pontba egyesítette a hajót és a Földet, így elvileg azonossá vált a Nap terében a gyorsulásuk, vagyis effektus nem lehet. (Legfeljebb r/R magasabb hatványai hanyagolhatók el bizonyos kifejezésekben.)

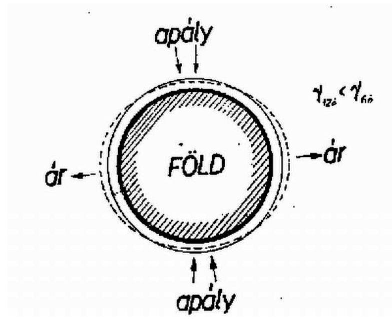
Vizsgáljuk meg most ezek alapján a hajó súlyának változását a déli, du. 6 órai és éjféli helyzetek között. Az alábbi gondolatmenetből azonnal kitűnik, hogy a hajó legkönnyebb délben, legnehezebb du. 6 órakor, ennél könnyebb, de a déli helyzetnél nehezebb éjfélkor. Tehát a déli és éjféli helyzetek között *súlynövekedés mutatkozik az éjféli helyzet javára.* Legnagyobb a súlynövekedés a déli – délután 6 órai átmenet alkalmával. Ennek az az oka, hogy a két helyzet közül csak az egyik esetben van a két testre ható gravitációs erőben inhomogenitásból eredő különbség: délben, amikor a hajó közelebb van a Naphoz, mint a Föld. Délután 6 órakor igen kis hibával egyenlő távolságra vannak a Nap középpontjától, így a Nap okozta gyorsulás pontosan egyenlő a pontrendszer mindkét tagjára. A rugós erőmérő ekkor azt az erőt méri, amely a Föld és a hajó között lép fel erőmentes térben (mintha a Nap nem is léteznék). Nevezzük ezt az erőt a hajó „abszolút súlyának”. A továbbiakban ehhez viszonyítjuk a súlyokat. (A továbbiakban egyszerűen „súly”-nak nevezzük a külső tér által befolyásolt súlyt). Az éjféli helyzetben ismét könnyebb a hajó, mint 6 órakor volt, mert a közelebb levő Földet nagyobb gyorsulásra kényszeríti a Nap, így a hajó „lemaradni igyekszik”. Ez a másodszori súlycsökkenés azonban nem egyezik meg az első súlynövekedéssel, mert az inhomogenitásból eredő különbség más, mégpedig kisebb, mint a dél – du. 6 órai átmenetben. (Egyre távolodva a Naptól, a tér adott felületen keresztül haladó erővonalai egyre „párhuzamosabbak”, a tér egyre homogénebb! Ezért kisebb a második átmenetnél a súlykülönbség, mint az elsőnél.) Így az ellentétes változások (súlynövekedés, majd súlycsökkenés) nem rontják le pontosan egymást. Feladatunk lesz a maradék súlyváltozás kiszámítása.

Eddig csak a Nap hatásáról volt szó. A Hold ár–apály hatásának a mértéke nagyobb, bár tömege 27 milliószor kisebb a Nap tömegénél. A nagyobb hatás oka az, hogy a Hold jóval közelebb van a Földhöz, mint a Nap (a Nap 390-szer messzebb van!). És ebben a közelségben nem a gravitációs erő abszolút nagysága a lényeg (a Nap gravitációs gyorsulása nagyobb a Föld helyén, mint a Hold okozta gravitációs gyorsulás!), hanem a *Hold terének inhomogenitása sokkal nagyobb,* mint a Nap terének inhomogenitása (a Föld körül).

Az erőhatások függetlensége elve alapján a Nap és a Hold hatásai vektoriálisan összegeződnek, feladatunk esetében egyszerűen algebrailag. Mielőtt a számításokat elvégezzük, összefoglalásul tekintsük át eddigi megállapításainkat:

A feladat első részére adandó válasz: mivel a Nap igen távol van, a Föld környezetében tere homogénnek tekinthető. Ebben az esetben (első közelítésben) semmiféle súlycsökkenés nincs. Pontosabb számításoknál figyelembe vesszük a Nap terének inhomogenitását: az erővonalak széttartóak, a hajó jobban gyorsul a Nap felé, mint a Föld, így a 6 órai helyzethez képest van némi súlycsökkenés. Éjfélkor viszont a Föld gyorsul jobban a Nap felé, így ismét súlycsökkenés áll elő a 6 órai helyzethez képest. Ha a Nap terének erőssége lineárisan csökkenne, ez a hatás éppen kiegyenlítené egymást; vagyis az éjféli és déli helyzetekben egyenlő lenne a hajó súlya, tehát inhomogén esetben sem volna súlykülönbözet. Mivel azonban a gravitációs tér *változása* a távolsággal *nem lineáris,* így a csökkenések különbsége ad egy megmaradó súlykülönbözetet.

Az ár–apály jelenség magyarázata: a Holdhoz közelebb levő és az azzal átellenben levő tengervíz könnyebb lesz (fajsúlya csökken), míg az ezek között helyet foglaló víztömegek fajsúlya maximális, aminek következtében *hidrosztatikai nyomáskülönbség* keletkezik, amely két átellenes irányba történő víztömeg áramlással egyenlítődik ki. (l. a 2. ábrát.)

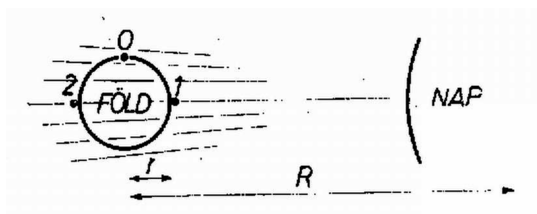


2. ábra

Ezek után megoldhatjuk feladatunkat, amelynek szövege a következő:

154. Mikor könnyebb a hajó, délben, vagy éjfélkor? (A hajó az Egyenlítőn tartózkodik, Nap–Föld távolság $R =$ 150 millió km*, Naptömeg* $M = 2 \cdot 10^{33}$ g*, Földtömeg* $m = 6 \cdot 10^{27}$ g*, Földsugár* $r = 6370$ km*, a gravitációs állandó* $= 6{,}67 \cdot 10^{-8}$ CGS*.) Hány ponddal könnyebb a hajó, ha tömege* $m_h = 15 \cdot 10^3$ tonna*? Más égitestek hatását ne vegyük figyelembe. Vizsgáljuk meg a hajó súlyát délután 6 órakor is! Számítsuk ki a különbözetet teljes napfogyatkozáskor a Föld két átellenes pontján, valamint ott, ahol 6 óra van. (Holdtömeg* $M_H = 7{,}4 \cdot 10^{25}$ g*, Föld–Hold távolság* $r_H = 384400$ km*.)*

I. megoldás: Válasszuk vonatkoztatási rendszerünknek az inerciarendszerek egyikét. Legyen a hajó (du. 6 órakor mérhető) „abszolút súlya” „erőmentes térben” vagyis csak a Föld hatására G_0. Számítsuk ki a hajó megváltozott súlyát az 1-es helyzetben (l. az 1. ábrát).



1. ábra

Itt valamivel könnyebb a hajó, mert a hozzá közelebb eső Nap jobban vonzza, mint a távolabbi Földet. A súlykülönbözetet megkapnánk, ha a hajó tömegét szoroznánk a Nap terének a hajó helyén okozott gravitációs gyorsulásával, ha a Föld szilárdan rögzítve lenne. Mivel azonban a Föld is esik a Nap vonzó hatására, csak a Föld és a hajó gyorsulásainak különbsége marad súlycsökkentő hatással.

A hajó gyorsulása: $g_{h_1} = \gamma \dfrac{M}{(R-r)^2}$,

a Föld gyorsulása: $g_f = \gamma \dfrac{M}{R^2}$.

A gyorsulások különbsége: $g_{h_1} - g_f = \gamma M \left(\dfrac{1}{(R-r)^2} - \dfrac{1}{R^2} \right) > 0$.

Így a 0 és 1-es helyzetek között a súlykülönbség (6 óra és dél között):

$$\Delta G_{0,1} = m_h (g_{h_1} - g_f) = m_h M \gamma \big[(R-r)^{-2} - R^{-2} \big].$$

Tehát a *teljes súly délben:*

$$G_1 = G_0 - \Delta G_{0,1} = G_0 - m_h \gamma M \big[(R-r)^{-2} - R^{-2} \big].$$

Számítsuk ki a 6 órai és éjféli helyzetek között a súlykülönbséget! (g_f eközben változatlan marad.)
A gyorsuláskülönbség:

$$g_f - g_{h_2} = \gamma M \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{(R+r)^2} \right) > 0.$$

Így a 0 és 2-es helyzetek között a súlykülönbség:

$$\Delta G_{0,2} = m_h (g_f - g_{h_2}) = m_h \gamma M \big[R^{-2} - (R+r)^{-2} \big].$$

Tehát a *teljes súly éjfélkor:*

$$G_2 = G_0 - \Delta G_{0,2} = G_0 - m_h \gamma M \big[R^{-2} - (R+r)^{-2} \big].$$

Látjuk, hogy mindkét szélső helyzetben kisebb a hajó súlya a 6 órai súlynál. Ez a különbség igen kicsiny. Még kisebb tehát a különbségek különbsége: a déli és éjféli helyzetek között mérhető súlycsökkenés. Ezt megkaphatjuk, ha a két 6 órára vonatkoztatott súlycsökkenést kivonjuk egymásból, ugyanis:

$$\Delta G_{1,2} \equiv G_2 - G_1 = G_0 - \Delta G_{0,2} - (G_0 - \Delta G_{0,1}) = \Delta G_{0,1} - \Delta G_{0,2} > 0.$$

($\Delta G_{0,2}$ azért kisebb, mint $\Delta G_{0,1}$, mert a Föld–hajó rendszer ekkor van átlagban messzebb a Naptól, vagyis az inhomogenitás ekkor kisebb! Íme most láthatjuk, hogy a különbségek különbsége miért és hogyan adódik.)

Az eredő súlycsökkenés a *feladatban kérdezett déli és éjféli helyzetek között:*

$$\Delta G_{1,2} = \gamma m_h M \left(\frac{1}{(R-r)^2} - \frac{2}{R^2} + \frac{1}{(R+r)^2} \right) = \gamma m_h M \frac{6R^2r^2 - 2r^4}{(R^2-r^2)^2 R^2}.$$

Ezzel megadtuk a feladat első kérdésére a választ általánosan. Ha egyszerűen megfelelő átírást alkalmazunk, megkapjuk külön a Hold által okozott súlycsökkenést:

$$\Delta G'_{1,2} = \gamma m_h M_h \left(\frac{1}{(R_H+r)^2} - \frac{2}{R_H^2} + \frac{1}{(R_H-r)^2} \right) = \gamma m_h M_h \frac{6R_H^2 r^2 - 2r^4}{(R_H^2 - r^2)^2 R_H^2}.$$

Látható, hogy $\Delta G'_{1,2} > \Delta G_{1,2}$ a fent mondottak miatt.

A Hold és a Nap együttes hatásának eredője együttállás esetén:

$$\Delta G''_{1,2} = \Delta G_{1,2} + \Delta G'_{1,2}.$$

A numerikus számítások eredményei:

A Nap terének gravitációs gyorsulása a Föld középpontjában

$g_f = 5{,}928 \cdot 10^{-1}$ cmsec^{-2}, a *Hold* terében ugyanott:

$g' = 3{,}34 \cdot 10^{-3}$ cmsec^{-2}, kb. 2 nagyságrenddel (100-szor) kisebb!

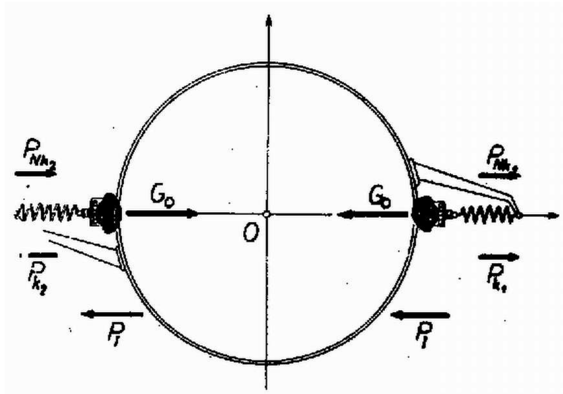
Az inhomogenitásból eredő *gyorsuláskülönbség* az 1-es és 0-ás helyzetek között a *Nap* terében: $g_{1,0} = 5{,}069 \cdot 10^{-5}$ cm sec^{-2}. Ugyanez a *Hold* terében: $g'_{1,0} = 1{,}101 \cdot 10^{-4}$ cm sec^{-2}, vagyis körülbelül *kétszerese* az előzőnek. A 0-ás és 2-es helyzetek között: $g_{0,2} = 4{,}936 \cdot 10^{-5}$ cmsec^{-2}, ill. $g'_{0,2} = 1{,}08 \cdot 10^{-4}$ cm sec^{-2} (szintén kb. kétszeres). A *súlykülönbség* az 1-es és 0-ás helyzetek között a Nap ill. Hold terében: $\Delta G_{0,1} = 775$ pond ill. $\Delta G_{0,1} = 1685$ pond. Ugyanez a 0-ás és 2-es helyzetek között: $\Delta G_{0,2} = 756$ pond, ill. $\Delta G_{0,2} = 1651$ pond. *Súlykülönbség* az 1-es és 2-es (déli és éjféli) helyzetek között a *Nap* hatására: $\Delta G_{1,2} = 19$ pond, a *Hold* hatására: $\Delta G'_{1,2} = 34$ pond. A Nap és Hold együttes hatására a *keresett súlykülönbség:* $\Delta G''_{1,2} = 53$ pond. A *relatív súlykülönbség* pedig mindössze: $\Delta G''_{1,2}/G_0 = 3{,}53 \cdot 10^{-9} = 3{,}53 \cdot 10^{-7}$ %. Ugyanez a du. 6 órai és déli helyzetek között: $\Delta G''_{1,0}/G_0 = 1{,}64 \cdot 10^{-7} = 1{,}64 \cdot 10^{-5}$ %. Látható, hogy a súlykülönbség miatt nem érdemes délben megvenni az árut és délután 6-kor eladni. A fenti eredményekből azt is leolvashatjuk, hogy *a Holdnak nagyobb szerepe van az ár–apály létrehozásában, mint a Napnak.*

II. megoldás. Megmutatjuk, hogy a dinamika alapegyenleteinek segítségével hogyan lehet *közvetlenül* felírni a keresett súlyokat, majd a súlykülönbséget. Vizsgáljuk a jelenséget a *Földhöz rögzített koordinátarendszerben.* Meg kell jegyezni, hogy a Föld–hajó egymáshoz rögzített rendszere *gyorsuló koordinátarendszer,* mivel a Nap terében centripetális erű hatására mozognak. Tudjuk, hogy a dinamika alapegyenletei (a Newton–féle törvények) *inerciarendszerben érvényesek,* de ha bevezetjük az ún. *tehetetlenségi,* vagy *inerciaerőket,* akkor a valódi, vagy Newton–féle erőkhöz ezeket *hozzáadva,* a *gyorsuló koordinátarendszerben* is ugyanúgy írhatjuk fel a dinamika törvényeit, mint inerciarendszerben (lásd a Matematikai Lapok XXI. kötet 3–4. számában megjelent cikket a 161. lapon). Fel fogjuk írni a hajóra ható összes külső erők eredőjét, amelyről tudjuk Newton II. törvénye értelmében, hogy a test tömegének és gyorsulásának szorzatával egyenlő ($ma = \sum P_k$). A gyorsulást a választott koordinátarendszerünkhöz kell viszonyítanunk. *A hajó gyorsulása a Földhöz képest nulla,* tehát a hajó *mozgásegyenlete* a Földhöz rögzített koordinátarendszerben felírva: $ma = 0$. Írjuk fel a hajóra ható összes külső erőket. Ezek: G_0, a Föld hajóra gyakorolt vonzóereje („abszolút súlya”), a Napnak a hajóra gyakorolt vonzóereje (P_{Nh_1}), a hajóra ható tehetetlenségi erő (P_1), végül a hajóra ható *kényszererő* (P_{K_1}), vagyis az az erő, amellyel a víz a hajót nyomja, ami nem engedi a hajót a Föld közepébe esni: a mindenkori, változó *súly ellenereje.* (Ezt mérhetjük a rugós erőmérővel.) Ezt keressük. (Hogy *kényszermozgásra* is érvényes legyen a $P = ma$ törvény, a *szabad erőkhöz hozzá kell venni a kényszererőket is,* ekkor a törvény változatlan alakban érvényes.)

Számítsuk ki a mozgásegyenletből a súlyt délben. Mozgásegyenletünk:

$$m_h a = G_0 - P_{Nh_1} + P_1 - P_{K_1} = 0.$$

Az erők előjelét irányuk határozza meg. G_0-t pozitívnak vettük mindkét esetben (l. a 3. ábrát).



3. ábra

Innen

$$P_{K_1} = G_0 - P_{Nh_1} + P_1,$$

ahol $P_1 = m_h R\omega^2$ centrifugális erővel, amit a gravitációs gyorsulással is kifejezhetünk: $P_1 = m_h \cdot \gamma \frac{M}{R^2}$. ($R\omega^2$ a koordinátarendszer gyorsulása!) Ugyanez a mozgásegyenlet a 2-es helyzetre felírva így alakul:

$$m_h a = G_0 + P_{Nh_2} - P_1 - P_{K_2} = 0,$$

így

$$P_{K_2} = G_0 + P_{Nh_2} - P_1.$$

Végül a keresett súlykülönbség:

$$\Delta G_{1,2} = P_{K_2} - P_{K_1} = P_{Nh_1} - 2P_1 + P_{Nh_2} = \gamma m_h \cdot M \left(\frac{1}{(R-r)^2} - \frac{2}{R^2} + \frac{1}{(R+r)^2} \right).$$

Az eredmény azonos az első megoldásával.

Láthatjuk, hogy a dinamika alaptörvényeit körültekintő módon alkalmazva biztos eszköz van a birtokunkban bonyolult, egyébként nehezen áttekinthető dinamikai problémák egyszerű megoldására.