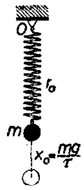
Galilei az egyenletesen gyorsuló mozgás törvényeinek megállapításával megadta a gyorsuló mozgások prototípusát. Ui. általános gyorsuló mozgás esetében is, ha a gyorsuló mozgás pályáját kis szakaszokra osztjuk, a szakaszokat egyeneseknek, és a gyorsulást mindegyik szakaszon állandónak tekinthetjük. Ez a felismerés azért rendkívül fontos, mert lehetővé teszi, hogy a mozgást egyszerű eszközökkel lépésenként tárgyalhassuk jó közelítéssel. Hogy a helyzet valóban ez, igazoljuk azáltal, hogy egy spirálrugó rezgésidejét meghatározzuk.



A vizsgálathoz felhasznált spirálrugó nyugalmi terheletlen hossza 24,1 cm. Az m tömeg 186 g. Ha a rugót x távolsággal megnyújtjuk, a fellépő rugalmas erő arányos a megnyújtással (Hooke törvénye)

$$P = \tau x. \tag{1}$$

τ a rugóállandó, számértékben jelenti az egységnyi megnyúlást létesítő erőt. Meghatározása úgy történik, hogy megmérjük, az m tömeg súlya (mg) mennyivel nyújtja meg a rugót (x). A 186 g tömeg súlya $mg = 186 \cdot 981 = 182\,466$ din. Ha ezzel terheljük a rugót, $x_0 = 21{,}6$ cm megnyúlást mérünk. Így a rugóállandó

$$\tau = \frac{mg}{x_0} = 8450 \text{ g sec}^{-2}. \tag{2}$$

A rugóra függesztett m tömeg a függőlegesben harmonikus rezgőmozgást végez. A rezgésidő

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\tau}}. \tag{3}$$

Az értékek behelyettesítésével

$$\frac{m}{\tau} = 0{,}022 \text{ sec}^2. \tag{4}$$

Hasonlóan $\frac{\tau}{m} = \frac{1}{0{,}022} = 45{,}45 \text{ sec}^{-2}$. A rugó rezgésideje pedig

$$T = 0{,}9313 \text{ sec}. \tag{5}$$

Nyugalmi helyzetben a rugó hossza $24{,}1 + 21{,}6 = 45{,}7$ cm. Jelöljük az x koordinátát a nyugalmi ponttól lefelé $-$, felfelé $+$ előjellel. Az m tömegre ható reakcióerő két erőből tevődik össze, az mg gravitációs és $+\tau x$ rugalmas erőből:

$$P_r = mg + \tau x, \tag{6}$$

ennélfogva a gyorsító erő

$$ma = P_r + mg = -\tau x, \tag{7}$$

és a gyorsulás

$$a = -\frac{\tau}{m}x = -45{,}45 \text{ cm sec}^{-2}. \tag{8}$$

Húzzuk le az m tömeget nyugalmi helyzetéből 10 cm-rel, és indítsuk el $v_0 = 0$ kezdősebességgel. A 10 cm hosszúságú 1/4 pályaszakaszt osszuk 10 egyenlő részre, és ezekre külön–külön végezzük el a számolást.

Minthogy P_r a távolsággal arányosan változik, a gyorsulás értékének számtani középértékét vesszük számításba. A mozgást a pálya egyes szakaszaiban egyenletesen gyorsulónak tételeztük fel, tehát az út–idő összefüggés

$$s = v_0\Delta t + \frac{a\Delta t^2}{2}, \tag{9}$$

hol v_0 a pályaszakasz kezdőpontjában érvényes sebességet jelenti, Δt a pályaszakasz megtételéhez szükséges idő. Ezt (9)-ből számítjuk ki. A sebességet

$$v = v_0 + a\Delta t \tag{9a}$$

adja.

x cm	a cm sec^{-2}	v cm sec^{-2}	Δt sec	t sec
10	431,7	29,4	0,0680	0,0680
9	386,1	40,45	0,0286	0,0966
8	340,7	48,12	0,0225	0,1191
7	295,3	53,91	0,0196	0,1387
6	249,9	58,41	0,0180	0,1567
5	204,4	61,79	0,0166	0,1733
4	159,0	64,31	0,0158	0,1891
3	113,6	66,05	0,0153	0,2044
2	68,1	67,08	0,0150	0,2194
1	22,7	67,42	0,0148	0,2342
0				

1. táblázat

Az 1. táblázat tartalmazza a közepes gyorsulást (a), a szakasz végpontjában levő sebességet v, a szakasz, valamint az egész út megtételére szükséges időt (Δt és t). A számolás menete: Az első sorban

$$a = \frac{454{,}5 + 409{,}0}{2} = 431{,}7 \text{ cm sec}^{-2}, \quad v_0 = 0,$$
$$1 = \frac{431{,}7}{2}\,\Delta t^2, \quad \Delta t = 0{,}0680 \text{ sec.}$$

A második sorban

$$a = \frac{409{,}0 + 363{,}4}{2} = 386{,}1 \text{ cm sec}^{-2}, \quad v_0 = 29{,}4 \text{ cm sec}^{-1},$$
$$1 = \frac{386{,}1}{2}\Delta t^2 + 29{,}4\,\Delta t, \quad \Delta t = 0{,}0286 \text{ sec},$$
$$t = 0{,}0966 \text{ sec}, \qquad v = 40{,}45 \text{ cm sec}^{-1} \text{ stb.}$$

Az összegezés a $\frac{T}{4}$-re 0,2342-t, T-re 0,9368 sec-ot ad. Viszont a rezgésidőformula 0,9313-at eredményez. A különbség 0,0055 sec., ami 0,59% eltérést jelent.

Az eltérés nem jelentékeny, hosszadalmas numerikus számolásokban igazításvétel, vagy az a középértékének csekély hibája eredményezhet ilyen eltérést. Emellett ne tévesszük szem elől azt sem, hogy az 1 cm-es pályaszakaszok elég nagyok.