Ohm törvénye és a Kirchhoff tételek segítségével sok egyszerű áramköri problémát lehet megoldani. Alkalmaztuk ezeket párhuzamosan kötött ellenállások esetén, shunt és előtét ellenállások méretezésekor. A következőkben megmutatjuk, hogy általánosabb megfogalmazásban bonyolultabb áramkörök számítására is alkalmasak.

I. Egy áramkör valamely szakaszán a feszültségesés egyenlő az ellenállásnak és a szakaszon átfolyó áramok algebrai eredőjének szorzatával (Ohm) törvénye).

$$E_i = R_i \sum_k I_{ik}$$

II. A vezetékhálózat egy csomópontjába érkező és az onnan eltávozó áramok algebrai összege zérus (Kirchhoff I.).

$$\sum_n I_n = 0$$

III. A vezetékhálózatban bármely zárt kör mentén a feszültségesések összege egyenlő az elektromotoros erők összegével (Kirch. II.).

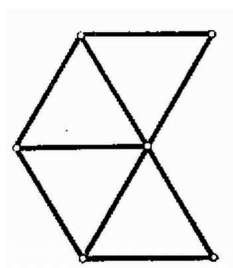
$$\sum_k R_k \cdot I_k = \sum_k E_k.$$

A tételek megengedik több áramforrás használatát, érvényességük viszont egyenáramokra korlátozódik. I. fenti megfogalmazása azt is jelenti, hogy az ellenállás független az áramintenzitástól; a hálózat lineáris.

Főként a harmadik tétel megfogalmazása tér el az eddigiektől. Egy áramkörre minden további nélkül érthető. Más szavakkal lényegében az első tételt fejezi ki. Bonyolultabb vezetékhálózatban szintén az Ohm törvény érvényét terjeszti ki a hálózatban kiszemelt tetszőleges zárt vezetőkörre.

Egy vezetékhálózatra vonatkozólag, ha ismerjük az elektromotoros erőket és az ellenállásokat, a fenti tételek pontosan annyi független egyenletet adnak, ahány az n ághoz tartozó $2n$ ismeretlen adat (feszültségesések és áramok) meghatározásához szükséges.

Hogy ezt belássuk, tekintsük az 1. ábrán látható vezetékhálózatot, amelynek minden köre csak három ágból áll, és csak külső, a hálózat kontúrján elhelyezkedő csomópontokat tartalmaz. A külső ágak száma egyenlő a csomópontok számával, az egyes körök közös, belső ágainak száma pedig eggyel kevesebb a körök számánál.



1. ábra

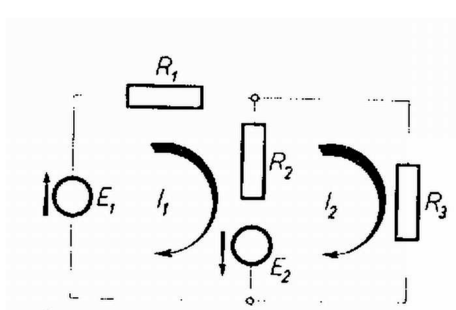
Ha most egy tetszőleges ágon felveszek egy újabb csomópontot, akkor ezzel az ágat két részre bontottam, ha pedig ezt a csomópontot egy másikkal, egy új ággal összekötöm, akkor egy áramkört bontottam két részre. Tehát a csomópontok vagy a körök számának növelése az ágak számának ugyanakkora növekedését eredményezi.

Ilyen eljárással tetszőleges vezetékhálózat állítható elő, ezért általában mondhatjuk, hogy egy l áramkört és m csomópontot tartalmazó hálózatban $n = m + l - 1$ ág van.

A csomóponti tétel $m-1$ független összefüggést, az áramköri tétel l egyenletet ad. Ehhez járul még az Ohm törvény n egyenlete, tehát a $2n$ ismeretlen meghatározására ugyanannyi független egyenletünk van.

Az egyenletek megoldására kétféle módszer használható. Ezeknek lényege az, hogy csak az egyik Kirchhoff tétel egyenleteit írjuk fel olyan alakban, hogy azzal a másik tétel egyenleteit már ki is elégítettük. Így az egyenletek száma csökken, a számolás egyszerűbb lesz. A továbbiakban olyan áramkörökkel foglalkozunk, melyeknél Kirchhoff II. tételét alkalmazhatjuk. A tétel alkalmazása könnyebb, viszont csak síkban kiteríthető hálózatok esetén használható.

A 2. ábrán látható áramkör adatait R_1, R_2, R_3 ellenállásokat és E_1, E_2 elektromotoros erőket ismerjük. Kiszámítandó, mekkora áramok folynak az egyes ágakban, mekkorák a feszültségesések az ellenállásokon.



2. ábra

Minden zárt áramkörben felveszünk $I_1, I_2, I_3, \ldots, I_n$ áramokat. (Jelen esetben I_1, I_2.) A kezdeti irányítás tetszőleges, pl. az óramutató járásával megegyező irányú. Az előjelviszonyok majd megadják a valódi irányokat. Az egyértelmű irányítás azonban elengedhetetlen.

Belátható, hogy ezekkel a köráramokkal a II. tételt ki is elégítettük. A III. egyenletek felírása előtt jegyezzük meg, hogy a körök közös ágaiban mindig két áram különbsége folyik, tehát pl. R_2-n $I_1 - I_2$ lefelé. Figyelni kell arra is, hogy a generátorok irányítottak, és ezeket is megfelelő előjellel kell tekintetbe venni.

Tehát a III.-t az első körre alkalmazva:

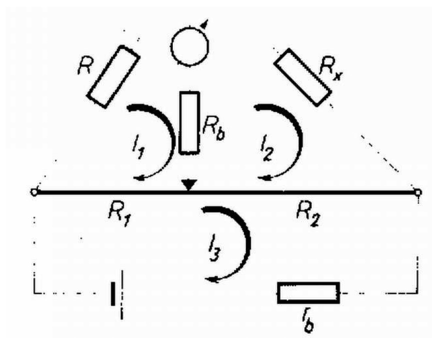
$$E_1 + E_2 = (R_1 + R_2)I_1 - R_2 I_2 \tag{1. a}$$

és a második körre:

$$-E_2 = -R_2 I_1 + (R_2 + R_3)I_2. \tag{1. b}$$

Azért szerepel $-E_2$, mert a generátor irányítása I_2-vel ellentétes. Ez két egyenlet két ismeretlennel. I_1 és I_2 kiszámítása után minden adat rendelkezésre áll.

Egy további példán vizsgáljuk meg a módszer alkalmazhatóságát. A 3. ábrán a Wheatstone–híd kapcsolási rajza látható. A jelölések ismertek R_b és r_b a galvanométer ill. a telep belső ellenállása. A hálózat három körből áll. Ezekben I_1, I_2, I_3 áramok folynak az óramutató járásával megegyező irányban.



3. ábra

Alkalmazva a III-t:

$$\begin{aligned}
&(2.\ a) & 0 &= I_1(R + R_1 + R_b) - I_2 R_b - I_3 R_1 \\
&(2.\ b) & 0 &= -I_1 R_b + I_2(R_x + R_2 + R_b) - I_3 R_2 \\
&(2.\ c) & E &= -I_1 R_1 - I_2 R_2 + I_3(R_1 + R_2 + r_b).
\end{aligned}$$

Először tisztázzuk az egyensúly feltételét. Hogy a számításokat egyszerűbbé tegyük, legyen R_b és $r_b \ll R_1$, R_x, R.

Így

$$\begin{aligned}
&(2'.\ a) & 0 &= I_1(R + R_1) - I_3 R_1 \\
&(2'.\ b) & 0 &= +I_2(R_x + R_2) - I_3 R_2 \\
&(2'.\ c) & E &= -I_1 R_1 - I_2 R_2 + I_3(R_1 + R_2).
\end{aligned}$$

(2$'$.a) és (2$'$.b)-ből

$$I_1 \frac{R + R_1}{R_1} = I_2 \frac{R_x + R_2}{R_2}. \tag{3. a}$$

A híd egyensúlyához szükséges, hogy $I_1 = I_2$. Ezt felhasználva:

$$\frac{R}{R_1} + 1 = \frac{R_x}{R_2} + 1, \quad \text{amiből} \quad R \cdot R_2 = R_x \cdot R_1. \tag{3}$$

Ez a Wheatstone–híd ismert összefüggése. Ezt persze egyszerűbben is megkaphatjuk, így azonban olyan kérdésekre is választ kaphatunk, amelyek korábbi ismereteink alapján nehezen, vagy egyáltalán nem lettek volna megoldhatók.

Visszatérve a (2) egyenletekre, azok jelölése egyszerűsíthető a következőképpen:

$$\begin{aligned}
&(4.\ a) & R_{11} I_1 - R_{12} I_2 - R_{13} I_3 &= E_1 \\
&(4.\ b) & -R_{21} I_1 + R_{22} I_2 - R_{23} I_3 &= E_2 \\
&(4.\ c) & -R_{31} I_1 + R_{32} I_2 + R_{33} I_3 &= E_3,
\end{aligned}$$

ahol

$E_1 = E_2 = 0$; $E_3 = E$; $R_{11} = R + R_1 + R_b$; $R_{12} = R_b$; $R_{13} = R_1$ stb.

Ezzel áttekinthető kifejezést kaptunk, amelyben R_{ii} az i-edik áramkörben levő eredő ellenállás, R_{ik} pedig az i-edik ág közös ellenállása ($R_{ik} = R_{ki}$). Ez a felírásmód mindig előnyösen alkalmazható.

Befejezésül egy numerikus példán számítsuk ki, mekkora ellenállás van a generátor sarkaira kötve, ha $E = 1$ V, $R = R_x = 10\Omega$, $R_1 = 6\Omega$, $R_2 = 4\Omega$, $R_b = 4\Omega$, $r_b \approx 0$. A híd ebben az állásban természetesen nincs kiegyensúlyozva.

$$\begin{aligned}
20\,I_1 - \ \ 4\,I_2 - \ \ 6\,I_3 &= 0,\\
-4\,I_1 + 18\,I_2 - \ \ 4I_3 &= 0,\\
-6\,I_1 - \ \ 4\,I_2 + 10\,I_3 &= 1.
\end{aligned}$$

Ebből tehát kiszámítható $R = E/I_3$.

A számításnak csak az eredményét közöljük:

$$I_3 = 43/285 \text{ A}, \qquad R \approx 6{,}6\Omega.$$