I. Az adottakból kivonással adódó

$$x^2-y^2=(a-b)(x-y)$$

egyenletet akár (1)-gyel, akár (2)-vel összekapcsolva az eredetivel ekvivalens rendszert kapunk. Újabb alakítással

$$(x-y)(x+y-a+b)=0,$$

ami két módon teljesül:

$$\begin{array}{lll} A) & \text{ha} & x-y=0, \\ B) & \text{ha} & x+y-a+b=0. \end{array}$$

Az $A)$ esetben $y=x$, és ezt (1)-behelyettesítve

$$x^2=(a+b)x, \qquad x(x-a-b)=0,$$

amiből az eredeti rendszer két megoldása:

(3) $$x_1=y_1=0, \qquad x_2=y_2=a+b.$$

A $B)$ esetben

(4) $$x+y=a-b, \qquad y=(a-b)-x,$$

és ezt (1)-be helyettesítve

(5) $$x^2-(a-b)x-b(a-b)=0,$$

amiből újabb két megoldás számára

(6′) $$\begin{aligned} x_3&=\frac{1}{2}\left(a-b-\sqrt{(a-b)(a+3b)}\right),\\ x_4&=\frac{1}{2}\left(a-b+\sqrt{(a-b)(a+3b)}\right), \end{aligned}$$

és mivel (4) és (5) szerint egyaránt

$$x_3+y_3=x_4+y_4=x_3+x_4=a-b,$$

azért

(6″) $$y_3=x_4, \qquad y_4=x_3.$$

Ezzel az egyenletrendszert megoldottuk.

II. A (3) megoldások minden (valós) a, b értékpár esetén valósak, (6′) és (6″) pedig akkor és csak akkor, ha a négyzetgyökjel alatti zárójeles tényezők előjele nem ellentétes; részletezve, ha vagy egyikük sem negatív:

$$a-b\geqq 0 \qquad \text{és} \qquad a+3b\geqq 0,$$

azaz

$$a>0 \qquad \text{és} \qquad -\frac{a}{3}\leqq b\leqq a,$$

vagy ha mindkét zárójelben negatív szám áll:

$$a-b<0 \qquad \text{és} \qquad a+3b<0,$$

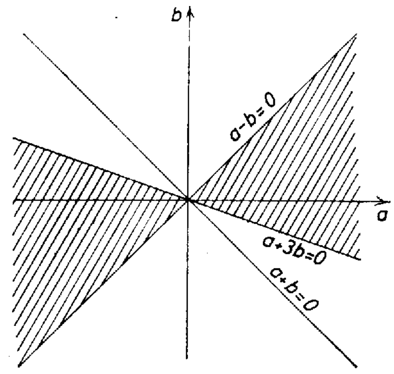
azaz

$$a<0 \qquad \text{és} \qquad a<b<-\frac{a}{3}.$$

III. Ugyanezek felhasználásával azt is kapjuk, hogy mind a négy megoldás valós és különböző, ha

$$\begin{array}{lll} a>0 & \text{és} & -\dfrac{a}{3}<b<a, \qquad \text{vagy ha} \\ a<0 & \text{és} & a<b<-\dfrac{a}{3}; \end{array}$$

ugyanis ezen egyenlőtlenségek teljesülése esetén a diszkrimináns pozitív, $x_3\neq x_4=y_3$, ugyanígy $x_4\neq y_4$ és ezek a (3) megoldásoktól is különbözők, mert azokban $x=y$; továbbá a (3) alattiak egymástól is különbözők, mert az egyenlőtlenségek miatt $b\neq -a$, és így $x_2=a+b\neq 0=x_1$ (1. ábra).



1. ábra

$x_3 = x_4$ (és vele $y_3 = y_4$) kétféleképpen adódhat:

α) ha $a - b = 0$, ekkor azonosak az $x_1 = y_1 = 0$ megoldással, ezért a rendszernek 2 megoldása van, ha $a \neq 0$, és egyetlen megoldása, ha $a = 0$.

β) ha pedig $a + 3b = 0$, ekkor azonosak az $x_2 = y_2 = a + b$ megoldással, 2 megoldás van, ha $a \neq 0$.

Megjegyzés. Ha $b \neq 0$, akkor (1) is, (2) is a derékszögű koordinátarendszerben egy-egy parabola egyenlete, és ezek egymás tükörképei a tengelyek közti, $y = x$, azaz $y - x = 0$ egyenletű szögfelezőre nézve, hiszen x és y felcserélésével a két egyenlet átmegy egymásba. Így a rendszer megoldásai e két parabola legföljebb 4 közös pontjának koordinátái. Az (x_1, y_1) és (x_2, y_2) megoldások rajta vannak a tükrözés tengelyén. Az (x_3, y_3), (x_4, y_4) megoldásokat összekötő, (4) egyenletű egyenes pedig merőleges a tükrözés tengelyére.