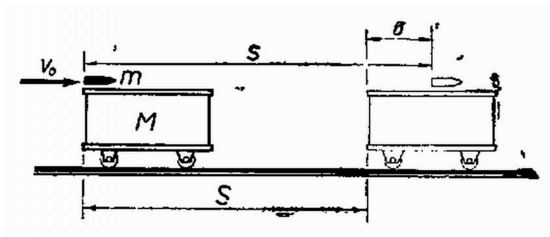
Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat által az 1960-ban érettségizettek számára rendezett verseny november 19-én folyt le Budapesten és 6 vidéki városban. A versenyzők 5 óráig dolgozhattak és bármilyen segédeszközt használhattak. A kitűzött feladatok a következők voltak:

1. $M = 40$ kg *tömegű, igen hosszú kocsi vízszintesen elhelyezett sínen súrlódás nélkül gurulhat. Az álló kocsi vízszintes tetejére, ezzel egy magasságban, a sínnel párhuzamosan repülve* $v_0 = 25$ m/sec *sebességgel* $m = 10$ kg *tömegű lövedék érkezik, amely csúszva halad tovább a kocsin, miközben azt súrlódása folytán mozgásba hozza. A súrlódási együttható a lövedék és a kocsi között* $\mu = 0{,}255$. *Mi történik? Mi történik, ha a kocsi csak* 80 m *hosszú? Mi történik, ha a kocsi is súrlódik a sínen* $\mu_2 = 0{,}0425$ *súrlódási együtthatóval? A súrlódási együtthatók függetlenek a sebességtől.*

(Wiedemann László)

Megoldás: Számítsuk a távolságokat és az időt attól a helytől és pillanattól, amikor a lövedék elérte a kocsit. A lövedék gyorsulása, sebessége, útja legyen a, v, s, a kocsié A, V, S.



1. ábra

A lövedék és a kocsi teteje között μmg súrlódási erő működik, ez az m tömegű lövedéket $a = \mu g$ (negatív) gyorsulással lassítja, a kocsit $A = \frac{\mu mg}{M} = \mu g = \frac{m}{M}$ gyorsulással gyorsítja. Mivel a gyorsulások állandóak, a lövedék is, a kocsi is egyenletesen változó mozgást végeznek. Ennek alapján a lövedék mozgástörvényei:

(1) $$v = v_0 - \mu g t,$$

(2) $$s = v_0 t - 0{,}5 \mu g t^2,$$

a kocsi mozgástörvényei:

(3) $$V = \mu g \frac{m}{M} t,$$

(4) $$S = \frac{1}{2} \mu g \frac{m}{M} t^2.$$

A lövedék által a kocsi tetején megtett út:

(5) $$\sigma = s - S = v_0 t - \frac{1}{2} \mu g \frac{m + M}{M} t^2,$$

A lövedék csúszása a kocsi tetején akkor szűnik meg, amikor a sínhez viszonyított sebességek egyenlővé lesznek. Ezután nincs súrlódási erő a lövedék és a kocsi között, így mindketten együtt mozognak tovább egyenletes mozgással. Ennek feltétele az (1) és (3) alatti sebességek egyenlősége:

$$v_0 - \mu g t_x = \mu g \frac{m}{M} l_x.$$

Itt t_x a lövedéknek a kocsi tetején való megtapadásáig eltelt időt jelenti. Megoldva ezt az egyenletet:

(6) $$t_x = \frac{v_0}{\mu g} \cdot \frac{M}{m + M}.$$

Ezt az időt (1)-be vagy (3)-ba helyettesítve kapjuk a közös végsebességet:

$$v_x = V_x = v_0 \cdot \frac{m}{m + M}.$$

A v_x közös sebességet az impulzus törvénnyel, a rugalmatlan ütközés törvényével is megkaphatjuk. Hiszen a lövedék és a kocsi közös, együttes továbbmozgása azt jelenti, hogy rugalmatlan ütközés történt. Feladatunk tulajdonképpen annak egy lehetőségét elemzi, miképpen folyhat le egy rugalmatlan ütközés a testek találkozásától közös továbbhaladásukig. A v_x közös sebesség független a súrlódási együtthatótól, attól is, vajon a súrlódási együttható tényleg független-e a sebességtől.

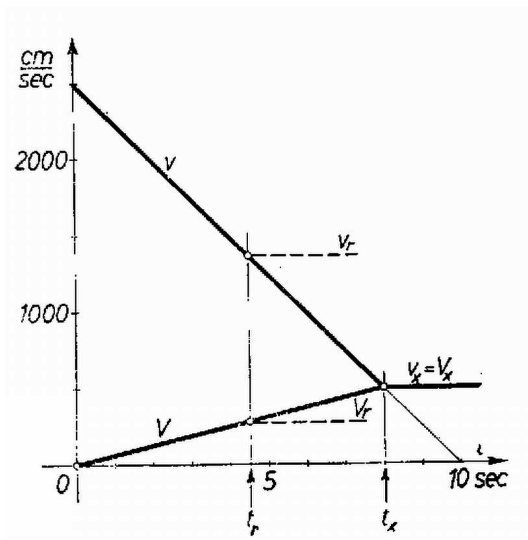
A lövedéknek és a kocsinak a sebesség kiegyenlítődésig megtett s_x és S_x útjait úgy kapjuk meg, hogy (2)-be és (4)-be helyettesítjük a t_x-re kapott (6) alatti eredményt:

$$s_x = \frac{v_0^2}{2\mu g} \cdot \frac{M(2m+M)}{(m+M)^2},$$
$$S_x = \frac{v_0^2}{2\mu g} \cdot \frac{Mm}{(m+M)^2}.$$

A lövedéknek a kocsi tetején megtett teljes csúszási hossza:

$$\sigma_x = s_x - S_x = \frac{v_0^2}{2\mu g} \cdot \frac{M}{m+M}.$$

A feladatban közölt számértékek mellett $a = 250$ cm/sec^2, $A = 62{,}5$ cm/sec^2, $t_x = 8$ sec, $v_x = V_x = 500$ cm/sec, $s_x = 120$ m, $S_x = 20$ m, $\sigma_x = 100$ m. Első grafikonunk a sebességek időtől való függését tünteti fel. A pontozott vonal azt mutatja, miképpen csökkent volna nullára a lövedék sebessége, ha álló kocsi tetején futott volna végig. (Ekkor a lövedék $\frac{v_0}{\mu g} = 10$ sec alatt állt volna meg $s_0 = \frac{v_0^2}{2\mu g} = 125$ m hosszú hosszú úton.)



2. ábra

Érdemes megvizsgálni az energia kérdését. A lövedék $0{,}5\, mv_0^2$ mozgási energiával érkezett $(3{,}125 \cdot 10^{10}$ erg$)$. Az együttes továbbhaladáskor a mozgási energia $0{,}5(m+M)v_x^2$, $(0{,}625 \cdot 10^{10}$ erg$)$. A súrlódási erő által végzett munka $\mu g \sigma_x (2{,}5 \cdot 10^{10}$ erg$)$; ez hővé alakul. Behelyettesítve eredményeinket, számításunk jó próbája, hogy a kezdeti mozgási energia egyenlő a súrlódási munkavégzés és a végső mozgási energia összegével.

Mi történik akkor, ha a kocsi csak $L = 80$ m hosszú? Mivel a lövedék megállásához a mozgó kocsi tetején mért $\sigma_x = 100$ m távolság volna szükséges, ezért ebben az esetben még a sebességek kiegyenlítődése előtt elhagyja a lövedék a kocsi tetejét, azután mindketten állandó sebességgel mozognak tovább. Az elhagyás pillanatát az jellemzi, hogy ekkor $\sigma = L$. (5) alapján:

$$v_0 t_r - \frac{1}{2}\mu g \cdot \frac{m+M}{M} \cdot t_r^2 = L.$$

Itt t_r a kocsi tetején való tartózkodás ideje. Egyenletünk fizikai értelemmel bíró megoldása:

$$t_r = t_x \left[1 - \sqrt{1 - \frac{L}{s_0} \cdot \frac{m+M}{M}}\right].$$

s_0 mint rövidítő jelölés a lövedéknek álló kocsi esetében észlelt futási távolságát jelenti; t_x értékét (6) adja. A lövedék lerepülésekor tapasztalható v_r, és V_r sebességeket (7)-nek (1)-be és (3)-ba való helyettesítése, az addig megtett s_r, és S_r utakat a (2)-be és (4)-be való helyettesítése adja. Első grafikonunkon a lövedék lerepülésekor érvényes sebességeket a szaggatott vonalak tüntetik fel. Számértékeink: $t_r = 4{,}42$ sec, $v_r = 1395$ cm/sec, $V_r = 276$ cm/sec, $s_r = 86{,}12$ m, $S_r = 6{,}12$ m.

Mindezek a kérdések újra feltehetők akkor, ha a kocsi és a sín között is van súrlódás μ_2 a súrlódási együtthatóval. A lövedék és a kocsi között most is μmg súrlódási erő működik, ezért a lövedék most is az (1) és (2) törvények által kifejezett módon mozog. Más a helyzet a kocsit illetőleg. A kocsit μmg erő gyorsítja, de a sín mentén $\mu_2(m+M)g$

erő lassítja. Ugyanis a lövedék súlya szintén odanyomja a kocsit a sínhez. Ha a lövedék nem nehezedne rá a kocsira, akkor nem volna súrlódási erő a lövedék és a kocsi között, és a feladat tárgytalan volna. A kocsit végeredményben $\mu mg - \mu_2(m+M)g = (\mu - \mu_2)mg - \mu_2 Mg$ erő gyorsítja. Ezt M-mel osztva kapjuk a kocsi gyorsulását:

$$A = (\mu - \mu_2)g\frac{m}{M} - \mu_2 g = \mu g \cdot \frac{m}{M} \cdot \left[1 - \frac{\mu_2}{\mu} - \frac{\mu_2}{\mu} \cdot \frac{M}{m}\right]. \tag{8}$$

A továbbiakban ugyanúgy folytatódik a számítás, mint előbb, csak a kocsi gyorsulása számára ezt a (8) alatti értéket kell használni. A lövedéknek a kocsihoz történő megtapadásának ideje most:

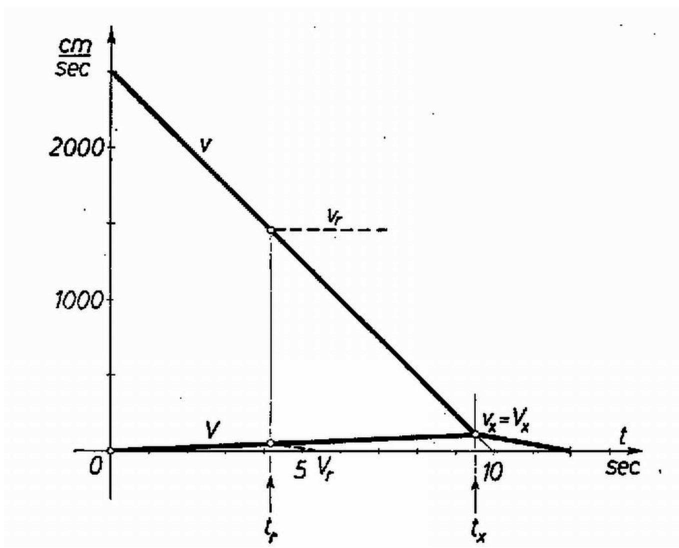
$$t_x = \frac{v_0}{(\mu - \mu_2)g} \cdot \frac{M}{m+M}.$$

és a közös végsebesség

$$v_x = V_x = v_0 \cdot \frac{m - \dfrac{\mu_2}{\mu - \mu_2} \cdot M}{m+M}.$$

A lövedék megtapadása után $m+M$ tömeg $\mu_2(m+M)g$ fékező gyorsulással mozog tovább.

Számadatainkat felhasználva $A = 10{,}417$ cm/sec^2, $t_x = 9{,}6$ sec, $v_x = V_x = 100$ cm/sec, $s_x = 124{,}8$ m, $S_x = 4{,}8$ m, $\sigma_x = 120$ m. A megtapadás után 41,65 cm/sec^2 negatív gyorsulással 2,4 sec alatt 1,2 m-es úton áll meg a kocsi, tetején a lövedékkel. Második grafikonunk szintén a sebességek alakulását tünteti fel.

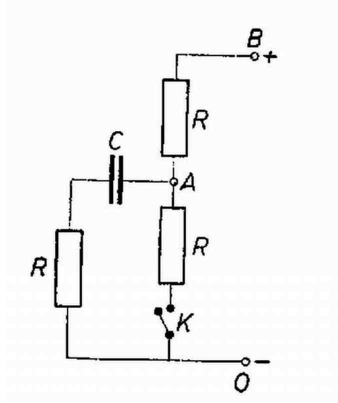


3. ábra

Ha a kocsi $L = 80$ m hosszú, akkor most is $\sigma = L$ egyenlet adja a lerepülés t_r idejét és többi adatát. Feladatunkban $t_r = 4{,}06$ sec, $v_r = 1485$ cm/sec, $V_r = 42$ cm/sec, $s_r = 80{,}86$ m, $S_r = 0{,}86$ m. Grafikonunk az ehhez tartozó sebességeket szaggatott vonalakkal ábrázolja. A lövedéktől megszabadult kocsi súrlódása folytán 1,01 sec alatt áll meg 0,21 m-en.

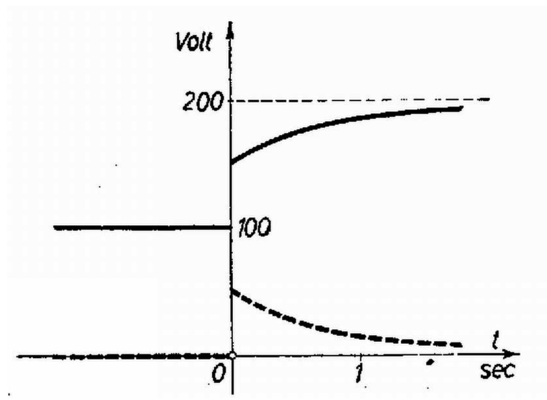
2. *A rajz szerinti kapcsolásban a föld és B pont közé hosszabb idő óta* 200 volt *egyenfeszültség van kapcsolva. R ellenállások értéke mindenütt* 1 $M\Omega$. *C kondenzátor kapacitása* 1 μF. *K pontban a vezetéket hirtelen megszakítjuk. Kérdés: mennyivel ugrik A pont feszültsége közvetlenül a megszakítás után (például néhány ezredmásodpercen belül)*?

(Károlyházy Frigyes)



4. ábra

Megoldás: Amíg az áram változatlanul folyik, A pont feszültsége 100 volt és D-ben természetesen 0 volt (D pont az ábrán a baloldali R ellenállás és a C kondenzátor között van!). K kapcsoló megszakítása után bizonyos (másodperces nagyságrendű) idő után A pont 200 volt-os, D ugyancsak 0 volt-os lesz. Közvetlenül a megszakítás után az akkor még csak 100 volt-ra feltöltött kondenzátorba újabb töltésnek kell beáramolnia. Ezt az áramot $200 - 100$ volt indítja, de ennek az áramnak az útjába $1 + 1 = 2\ M\Omega$ ellenállás van kapcsolva. Ha ugyanis A-nál beáramlik a töltés a kondenzátorba, akkor a megosztás következtében továbbküldött töltésnek D-nél ki kell áramolnia. A 2 $M\Omega$ összes ellenállásra összesen 100 volt jut, ezért mindegyik 1 $M\Omega$-os ellenálláson az átmenő áram 50–50 volt-os feszültségeséssel jár együtt. Tehát közvetlenül a bekapcsolás pillanatában A pont feszültsége 100 volt-ról 150 volt-ra ugrik fel, azután aránylag lassan (másodpercnyi idő alatt) emelkedik fel 200 volt-ra. Ezt tünteti fel grafikonunk is.



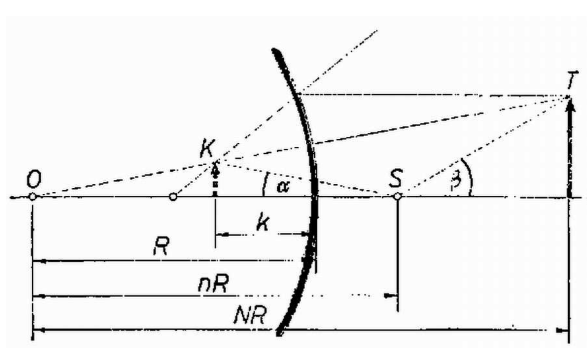
5. ábra

D pont feszültsége a kikapcsolás pillanatában 50 volt-ra ugrik fel, azután süllyed 0-ra. A kondenzátor feszültsége a kikapcsolás pillanatában 100 volt. Mivel a kondenzátor szimmetrikus kapcsolásban foglal helyet OD és AB ellenállások között, ezért érthető, a 200 volt-os feszültség esésben úgy helyezkedik el, hogy alatta is, fölötte is 50 volt legyen. Az ellenállásokra jutó feszültségesések igen rövid idő alatt állnak be, mert a vezetékek kapacitása igen csekély. A kondenzátor feszültségének 100 volt-ra való emelésére $10^{-6} \cdot 100 = 10^{-4}$ coulomb beáramlása szükséges. A 2 $M\Omega$-os ellenálláson 100 volt hatására $100 : 2 \cdot 10^{-6} = 5 \cdot 10^{-5}$ amperes áram folyik, amely (állandó erősség esetében) $10^{-4} : 5 \cdot 10^{-5} = 2$ másodperc alatt töltené fel a kondenzátort. Ezért különül el élesen a kikapcsolással járó feszültség ugrás a későbbi lassú feltöltődéstől.

3. *A sima Csendes-Óceán fölött* 20 km *magasságban repülőgép repül. A Hold éppen függőlegesen felette van. Mekkorának látja a pilóta a tengerben tükröződő Holdat a tényleges Hold látszólagos nagyságához viszonyítva? A Föld rádiusza* 6370 km, *a Hold távolsága a Föld középpontjától* 380 000 km.

(Vermes Miklós)

Megoldás: A tenger vízszintje domború gömbtükör, melynek rádiusza $R = 6370$ km. Az S pontban levő megfigyelő nR távolságban, a Hold NR távolságban van a Föld középpontjától. A gömbtükör a T méretű Holdról K méretű virtuális képet ad.



6. ábra

A feladatban adott kérdésre a látószögek aránya adja meg a feleletet. A Hold látószöge

$$\beta \approx \mathrm{tg}\ \beta = \frac{T}{(N-n)R},$$

képének látószöge

$$a \approx \operatorname{tg} \alpha = \frac{K}{k + (n-1)R}.$$

A látószögek aránya

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{K}{T} \cdot \frac{N-n}{n-1+\dfrac{k}{R}}. \tag{1}$$

A domború gömbtükör törvénye szerint

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{(N-1)R} = -\frac{2}{R}.$$

Innen (abszolút értékben)

$$\frac{R}{k} = 2 + \frac{1}{N-1} = \frac{2N-1}{N-1}$$

és

$$\frac{k}{R} = \frac{N-1}{2N-1}. \tag{2}$$

A $K : T$ lineáris nagyítás az O pontban találkozó, K és T függőleges befogókkal rendelkező hasonló derékszögű háromszögek alapján, (2) segítségével:

$$\frac{K}{T} = \frac{R-k}{NR} = \frac{1-\dfrac{k}{R}}{N} = \frac{1-\dfrac{N-1}{2N-1}}{N} = \frac{1}{2N-1}. \tag{3}$$

A feladat kérdésére megkapjuk a választ, ha (1)-be helyettesítjük (2) és (3) eredményét:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{2N-1} \cdot \frac{N-n}{n-1+\dfrac{N-1}{2N-1}} = \frac{2N-1}{2N-1} \cdot \frac{N-n}{(n-1)\cdot(2N-1)+N-1} \cdot \frac{\alpha}{\beta} = \frac{N-n}{2Nn-N-n}.$$

Néhány számszerű adat. Ha a megfigyelés 20 km magasságban történik, akkor $n = 1{,}003$.

Ha a Holdat nézzük, $N = 60{,}6$ és $\alpha : \beta = 0{,}9939$
ha a Napot nézzük, $N = 23\,540$ és $\alpha : \beta = 0{,}9940$.

Ha 20 km magasságból 600 km magasan keringő szputnyikot nézünk, akkor $n = 1{,}094$ és $\alpha : \beta = 0{,}933$.

A verseny eredménye: Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat az I. díjat nem adta ki. II. díjat nyert **Elsner Gábor** (a budapesti Petőfi Gimnáziumban Szondy Lajos tanítványa), III. díjat nyert **Mezei Ferenc** (a budapesti Rákóczi Gimnáziumban Kozma Péter tanítványa). Dicséretet nyertek jutalommal **Grad János** (a budapesti Kölcsey Gimnáziumban Urbán János tanítványa) és **Hild Erzsébet** (a békéscsabai Rózsa Ferenc Gimnáziumban Molnár László tanítványa).