Súlypont, első- és másodrendű nyomatékok

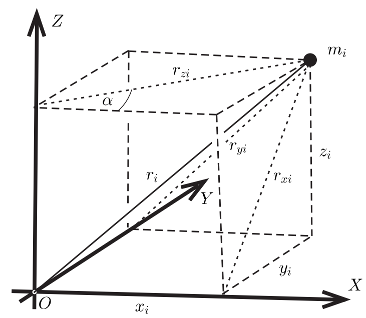
II. rész: Másodrendű nyomatékok

Térjünk vissza a tetszőleges X, Y, Z derékszögű koordináta-rendszerben elhelyezett n tömegpontra.

A *12. ábrának* megfelelően az i-edik pont koordinátái legyenek x_i, y_i, z_i, az X, Y, ill. Z tengelyektől való távolságai pedig r_{xi}, r_{yi} ill. r_{zi}, a koordináta-rendszer kezdőpontjától való távolsága r_i. (Az x_i, y_i z_i számok, mint koordináták előjeles mennyiségek, az r-ek távolságokat és így pozitív számokat jelentenek.) Ezek között közismerten a következő összefüggések állanak fenn:

$$r_{xi}^2 = y_i^2 + z_i^2, \quad r_{yi}^2 = z_i^2 + x_i^2, \quad r_{zi}^2 = x_i^2 + y_i^2, \tag{7}$$

$$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2. \tag{8}$$



12. ábra

Ezekből egyszerűen következik, hogy:

$$r_i^2 = r_{xi}^2 + x_i^2 = r_{yi}^2 + y_i^2 = r_{zi}^2 + z_i^2, \tag{9}$$

illetve:

$$r_i^2 = \frac{1}{2}\left(r_{xi}^2 + r_{yi}^2 + r_{zi}^2\right). \tag{10}$$

A tömegpontok koordinátái és tömegei által meghatározott következő mennyiségeket:

$$\Theta_{yz} = \sum_{i=1}^{n} = m_i x_i^2, \qquad \Theta_{zx} = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i^2, \qquad \Theta_{xy} = \sum_{i=1}^{n} m_i z_i^2, \tag{11}$$

az YZ, ZX ill. XY síkokra vonatkozó másodrendű, vagy tehetetlenségi nyomatékoknak nevezzük. Most láthatjuk az elnevezések eredetét: az összegezésnél az elsőrendű nyomatékoknál a koordináták elsőfokon, a másodrendű nyomatékoknál a koordináták másodfokon szerepelnek.

Ha most pl. az YZ síkra vonatkozó másodrendű nyomatékot

$$\Theta_{yz} = M a_x^2 l_x^2 \tag{12}$$

alakban írjuk fel, vagyis másodrendű nyomatékra a (12) egyenlettel definiáljuk az a_x-et,[2] *az* I., II. *és* III. *tételek változatlanul érvényben maradnak.*

I. Valamely tetszőleges síkra vonatkozó nyomatékot úgy kaphatunk meg, hogy a súlyponton keresztülmenő, az eredeti síkkal párhuzamos síkra vonatkozó nyomatékhoz hozzáadjuk a súlypontba képzelt egyetlen M tömegű pont nyomatékát.

II. a_x értéke nem változik, ha mindegyik tömegpont tömegét ugyanolyan arányban növeljük vagy csökkentjük, vagy ha mindegyik tömegpont koordinátáit ugyanolyan arányban növeljük vagy csökkentjük.

III. a_x és az YZ síkra vonatkozó nyomaték értéke nem változik, ha az Y_i és Z_i koordinátákat tetszőlegesen megváltoztatjuk: (12) egyenletből az a_x-et kifejezve:

$$a_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i^2}{l_x^2 \sum_{i=1}^{n} m_i}}, \tag{13}$$

[2] Természetesen ez az a_x nem azonos az elsőrendű nyomaték a_x-ével.

ebből a II. és III. tétel érvényessége nyilvánvaló. Az I. tétel érvényességét úgy igazolhatjuk, hogy felírjuk a másodrendű nyomatékokat az $Y'Z'$ súlysíkra (l. 2. ábra).

$$\Theta'_{yz} = \sum_{i=1}^{n} m_i {x'}^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_s)^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i x_z^2 - 2x_s \sum_{i=1}^{n} m_i x_i + x_s^2 \sum_{i=1}^{n} m_i.$$

Mivel (2) szerint $\sum_{i=1}^{n} m_i x_i = x_s \sum_{i=1}^{n} m_i$,

$$\Theta'_{yz} = \Theta_{yz} - x_s^2 \sum_{i=1}^{n} m.$$

Ezért:

$$\Theta_{yz} = \Theta'_{yz} + M x_s^2,$$

és teljesen hasonló módon következik, hogy

$$\Theta_{zx} = \Theta'_{zx} + M y_s^2,$$

(14) $$\Theta_{xy} = \Theta'_{xy} + M z_s^2.$$

Ezt a tételt *Steiner-tételnek* szokták nevezni. Ezzel a másodrendű nyomatékokra is igazoltuk az I. tétel érvényességét.[3] Az is látható, hogy egymással párhuzamos síkok közül a súlysíkra vonatkozó nyomaték a legkisebb. A

(15) $$\Theta'_x = \sum_{i=1}^{n} m_i r_{xi}^2, \qquad \Theta'_y = \sum_{i=1}^{n} m_i r_{yi}^2, \qquad \Theta'_z = \sum_{i=1}^{n} m_i r_{zi}^2$$

mennyiségeket az X, Y, ill. Z tengelyekre, a

(16) $$\Theta_0 = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

mennyiséget pedig a kezdőpontra vonatkozó másodrendű vagy tehetetlenségi nyomatéknak nevezzük. A (7)–(10) összefüggéseknek megfelelően a különböző másodrendű nyomatékok között a

(17) $$\Theta_x = \Theta_{zx} + \Theta_{xy}; \quad \Theta_y = \Theta_{xy} + \Theta_{yz}; \quad \Theta_z = \Theta_{yz} + \Theta_{zx},$$

(18) $$\Theta_0 = \Theta_{yz} + \Theta_{zx} + \Theta_{xy},$$

(19) $$\Theta_0 = \Theta_x + \Theta_{yz}; \quad \Theta_0 = \Theta_y + \Theta_{zx}; \quad \Theta_0 = \Theta_z + \Theta_{xy}$$

és

(20) $$\Theta_0 = \frac{1}{2}(\Theta_x + \Theta_y + \Theta_z)$$

összefüggések állanak fenn.

Az I – III. tételek a definíciókból következtethető kis módosításokkal a tengelyekre és pontokra vonatkozó tehetetlenségi nyomatékokra is érvényesek. Tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékoknál e tételek:

I. Tengelyre vonatkozó másodrendű nyomatéknál (14) és (17)-ből következik, hogy valamely tengelyre vonatkozó másodrendű nyomatékot a tengellyel párhuzamos súlyegyenesre vonatkozó másodrendű nyomaték és a súlypontba képzelt egész tömeg másodrendű nyomatékából tehetjük össze.

II. Például az X tengelyre vonatkozó másodrendű nyomatékot

(21) $$\Theta_x = M \beta_x^2 r_x^2$$

alakban írhatjuk fel, ahol most r_x-nek választjuk a pontrendszernek valamilyen, az X tengelyre vonatkozó, nullától különböző tetszőleges radiális méretét. (Pl. valamely tömegpontnak az X tengelytől való távolságát, vagy két tömegpont ezen távolságainak különbségét stb.) A (21) egyenlet által így definiálható β_x megint változatlan marad a tömegpontok tömegeinek vagy koordinátáinak ugyanolyan állandóval való megszorzásakor.

III. β_x és így Θ_x értéke most csak az egyes tömegpontoknak az X tengelytől való távolságától függ. Ezért pl. az X tengely körüli r sugarú henger palástjain levő összes tömegpontok tömege a palást egyetlen tetszőleges pontjában gyűjthető össze.

Pontra vonatkozó tehetetlenségi nyomatéknál e tételek:

[3] Félreértések elkerülése végett megjegyezzük, hogy általánosan $n > 3$ rendű nyomatékra ez a tétel már nem érvényes.

I. Pontra vonatkozó másodrendű nyomatéknál (14) és (18)-ból következik, hogy tetszőleges pontra a másodrendű nyomaték a súlypontra vonatkozó másodrendű nyomaték és a súlypontba képzelt egész tömeg másodrendű nyomatékának összege.

II. A pontra vonatkozó másodrendű nyomatékot

$$\Theta_0 = M\gamma^2 r^2 \tag{22}$$

alakban írhatjuk fel, ahol r a pontrendszernek valamilyen, a kezdőpontra vonatkozó nullától különböző tetszőleges radiális mérete (pl. valamelyik tömegpontnak a kezdőponttól való távolsága, két tömegpont ilyen távolságának különbsége stb.), az előző transzformációkra nézve γ most is állandó.

III. γ és Θ_0 értéke csak a tömegpontoknak az alapponttól való távolságától függ. Ezért pl. a kezdőpont körüli r sugarú gömb felületén levő összes tömegpontok a felület tetszőleges pontjába gyűjthetők össze.

(17)–(20)-ból következik, hogy ha pl. az összes tömegpontok az X tengelyen feküsznek (vonaldarabokra):

$$\Theta_x = \Theta_{zx} = \Theta_{zy} = 0, \tag{23}$$

$$\Theta_0 = \Theta_z = \Theta_y = \Theta_{yz}. \tag{24}$$

Ha az összes tömegpontok az XY síkban feküsznek (síkidomokra):

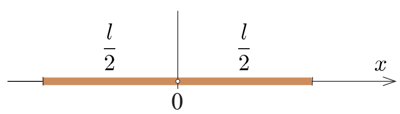
$$\Theta_{xy} = 0, \tag{25}$$

$$\Theta_x = \Theta_{zx}; \quad \Theta_y = \Theta_{yz}, \tag{26}$$

$$\Theta_0 = \Theta_z = \Theta_{yz} + \Theta_{zx} = \Theta_x + \Theta_y. \tag{27}$$

Megint bemutatjuk néhány példán, hogy az I-III. tételek segítségével hogyan számíthatunk tehetetlenségi nyomatékot integrálás nélkül.

6. *példa.* Egyenletes tömegeloszlású, l hosszúságú vonaldarab másodrendű nyomatéka a súlypontjára.



13. ábra

Bontsuk a vonalat két féldarabra (*13. ábra*), és alkalmazzuk az I. és II. tételt:

$$\Theta_0 = Ma_x^2 l^2 = 2\left[\frac{M}{2}a_x^2\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{M}{2}\left(\frac{l}{4}\right)^2\right],$$

ebből:

$$a_x^2 = \frac{1}{12}.$$

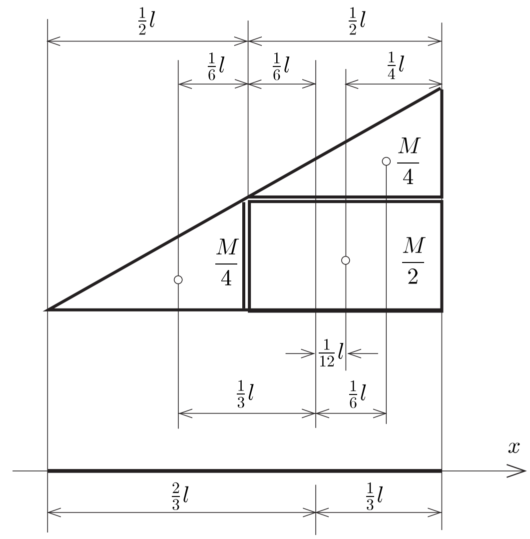
Tehát (24) szerint a súlyponton keresztülmenő merőleges tengelyre

$$\Theta = \frac{1}{12}Ml^2.$$

Számítsuk még ki a tehetetlenségi nyomatékot a vonaldarab végpontjára is. A vonaldarab végpontjára a Steiner-tétel szerint:

$$\Theta_0 = \frac{1}{12}Ml^2 + M\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}Ml^2$$

7. *példa.* Lineárisan növekvő sűrűségű, l hosszúságú egyenes vonaldarab tehetetlenségi nyomatéka a súlypontjára. Bontsuk a vonalat két féldarabra, akkor a 2. példa meggondolásai szerint a jobb oldali vonaldarab összetehető egy állandó sűrűségű, $\frac{M}{2}$ tömegű és egy a jobb oldali vonaldarabbal azonos, lineárisan növekvő sűrűségű, $\frac{M}{4}$ tömegű vonalból.



14. ábra

Mivel a súlypontok távolságai O-tól rendre (l. a 2. példát és a *14. ábrát*) $\dfrac{1}{3}l$, $\dfrac{1}{6}l$ és $\dfrac{1}{12}l$, az I. és II. tétel és az előző példa alapján megint felírhatjuk, hogy:

$$Ma_x^2l^2 = \frac{M}{4}a_x^2\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{M}{4}\left(\frac{l}{3}\right)^2 + \frac{M}{4}a_x^2\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{M}{4}\left(\frac{l}{6}\right)^2 + \frac{M}{2}\frac{1}{12}\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{M}{2}\left(\frac{l}{16}\right)^2,$$

innen:

$$a_x^2 = \frac{1}{18},$$

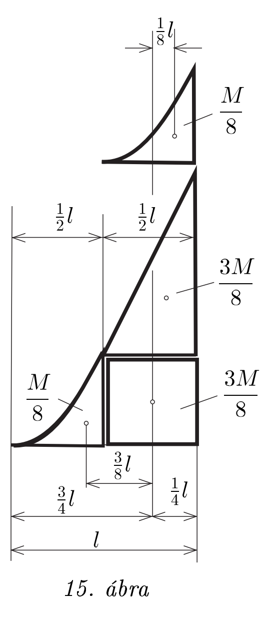
a súlyponton keresztülmenő merőleges tengelyre:

$$\Theta = \frac{1}{18}Ml^2.$$

A bal oldali végpontra most

$$\Theta_0 = \frac{1}{18}Ml^2 + M\left(\frac{2}{3}l\right)^2 = \frac{1}{2}Ml^2 \quad \text{lesz.}$$

8. *példa.* Négyzetesen növekvő sűrűségű, l hosszúságú egyenes vonaldarab tehetetlenségi nyomatéka a súlypontjára. Bontsuk a vonalat két féldarabra, akkor az 5. példa szerint a vonaldarab jobb oldala három részre bontható, egy a bal oldallal megegyező, egy lineárisan növekvő sűrűségű és egy állandó sűrűségű vonalra. Tömegek és súlyponttávolságaik az 5. példából ismeretesek, illetve kiszámíthatók (*15. ábra*).



15. ábra

Így felírható, hogy:

$$Ma_x^2 l^2 = \frac{M}{8} a_x^2 \left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{M}{8}\left(\frac{3l}{8}\right)^2 + \frac{M}{8} a_x^2 \left(\frac{l}{2}\right)^2 +$$
$$+ \frac{M}{8}\left(\frac{l}{8}\right)^2 + \frac{3M}{8}\frac{1}{18}\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{3M}{8}\left(\frac{l}{12}\right)^2 + \frac{3M}{8}\frac{1}{12}\left(\frac{l}{12}\right)^2.$$

Ebből:

$$a_x^2 = \frac{3}{80},$$

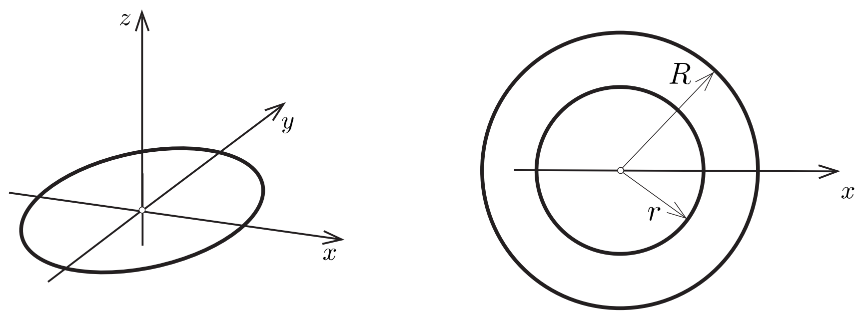
és így a súlyponton keresztülmenő tengelyre:

$$\Theta = \frac{3}{80} M l^2.$$

A bal oldali végponton pedig:

$$\Theta_0 = \frac{3}{80} M l^2 + M\left(\frac{3}{4} l\right)^2 = \frac{3}{5} M l^2.$$

9. *példa.* Körlap tehetetlenségi nyomatékai (lásd a *16. ábra* szerinti elrendezést).



16. ábra

Θ_0 számításánál az r sugarú kör $2\pi r$ kerületén fekvő tömegpontokat az X tengelyen összegyűjtve, a kör lineárisan növekvő sűrűségű R hosszúságú vonallal helyettesíthető. Θ_0 e vonalnak a kezdőpontjára vonatkozó tehetetlenségi nyomatékával egyezik meg, vagyis a 7. példa szerint

$$\Theta_0 = \frac{1}{2} M R^2.$$

(27) szerint, mivel most szimmetria okokból nyilván $\Theta_x = \Theta_y$,

$$\Theta_x = \Theta_y = \frac{\Theta_0}{2} = \frac{1}{4} M R^2.$$

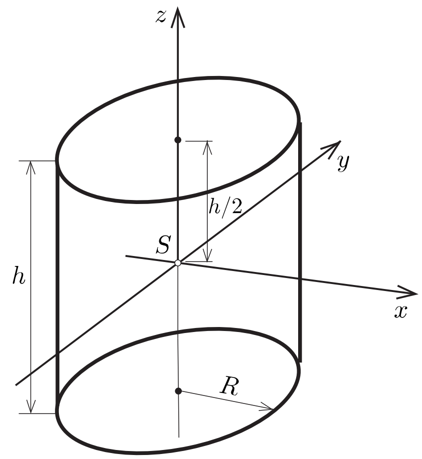
10. *példa.* Gömb tehetetlenségi nyomatékai a súlypontjában elhelyezett koordináta-rendszerben. A számításnál most az r sugarú gömb $4\pi r^2$ felületén fekvő tömegpontok gyűjthetők össze egy tengelyen, a gömb négyzetesen növekedő sűrűségű R hosszúságú rúddal helyettesíthető. Θ_0 a rúdnak kezdőpontjára vonatkozó tehetetlenségi nyomatékával egyezik meg, vagyis a 8. példa szerint:

$$\Theta_0 = \frac{3}{5} M R^2.$$

(20) szerint, mivel most a szimmetria miatt

$$\Theta_x = \Theta_y = \Theta_z, \quad \Theta_{xy} = \Theta_{yz} = \Theta_{zx};$$
$$\Theta_x = \frac{2}{3}\Theta_0 = \frac{2}{5} M R^2,$$
$$\Theta_{xy} = \frac{1}{3}\Theta_0 = \frac{1}{5} M R^2.$$

11. *példa.* Egyenes körhenger tehetetlenségi nyomatékai a *17. ábra* szerint a súlypontjában elhelyezett koordináta-rendszerben.



17. ábra

Θ_z számításánál a hengert az XY síkba összenyomva egyenletes sűrűségű körlapot kapunk. Így a 9. példa alapján

$$\Theta_z = \frac{1}{2}MR^2.$$

Θ_{xy} számításánál a hengert a Z tengelybe nyomva össze egyenletes sűrűségű, h hosszúságú vonaldarabot kapunk. Erre a 6. példa szerint

$$\Theta_{xy} = \frac{1}{12}Mh^2.$$

Ezekből a szimmetria miatt, a (17–20) összefüggések felhasználásával:

$$\Theta_{yz} = \Theta_{zx} = \frac{\Theta_z}{2} = \frac{1}{4}MR^2$$
$$\Theta_0 = \Theta_z + \Theta_{xy} = M\frac{h^2 + 6R^2}{12}$$
$$\Theta_x = \Theta_y = \Theta_0 - \frac{1}{2}\Theta_z = M\frac{h^2 + 3R^2}{12}.$$

Bodó Zalán