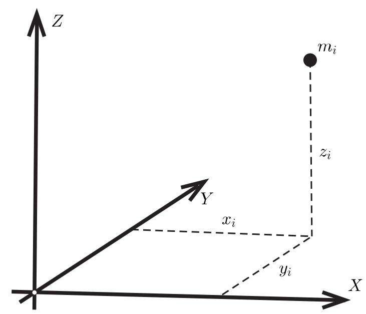
Súlypont, első- és másodrendű nyomatékok

I. rész

Legyen adva a térben tetszőleges elrendezésben egy n tömegpontból álló rendszer. A tömegpontok tömegei legyenek $m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_i,\ \ldots,\ m_n$. Legyen továbbá $\sum_{i=1}^{n} m_i = M$ a tömegpont rendszer egész tömege.

Vegyünk fel tetszőlegesen egy térbeli derékszögű X, Y, Z koordináta-rendszert.

Az i pont koordinátáit jelöljük x_i, y_i, ill. z_i-vel (*1. ábra*).



1. ábra

A tömegpontok tömegei és koordinátái által meghatározott következő mennyiségeket,

(1) $$N_{yz} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i, \quad N_{zx} = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i, \quad N_{xy} = \sum_{i=1}^{n} m_i z_i$$

az YZ, ZX, ill. XY síkokra vonatkozó elsőrendű nyomatékoknak nevezzük. Ezekre vonatkozólag fennáll a következő érdekes tétel:

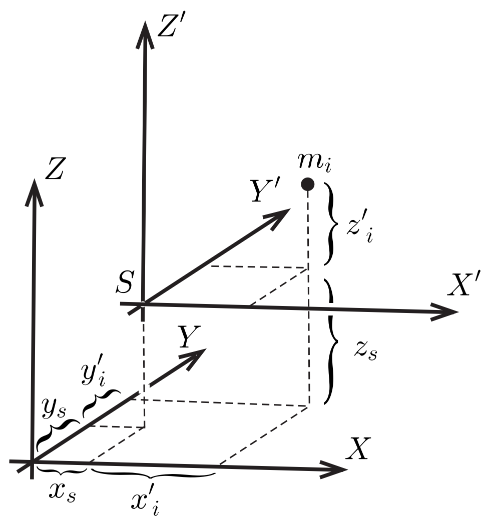
Létezik a térben egy és csak is egy olyan pont, amelyben mint kezdőpontban elhelyezett tetszőleges irányítású derékszögű koordináta-rendszerben a három elsőrendű nyomaték mindegyike nulla.

Bebizonyítjuk, hogy ezen S pont az

(2) $$x_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{N_{yz}}{M}, \quad y_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{N_{zx}}{M}, \quad z_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{N_{xy}}{M},$$

koordinátájú pont.

Vegyünk fel az S pontban egy az X, Y, Z koordináta-rendszerrel párhuzamos tengelyű X', Y', Z' koordináta-rendszert (*2. ábra*).



2. ábra

Ekkor

(3) $$x'_i = x_i - x_s \quad y'_i = y_i - y_s, \quad z'_i = z_i - z_s$$

lévén az új koordináta-rendszer síkjaira az elsőrendű nyomatékok nullák. Pl. $Y'Z'$ síkra (3) miatt:

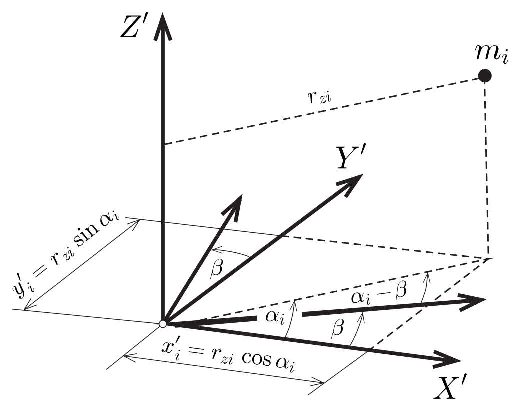
$$N'_{yz} = \sum_{n-1}^{n} m_i x'_i = \sum_{n-1}^{n} m_i(x_i - x_s) = \sum_{n-1}^{n} m_i x_i - \sum_{n-1}^{n} m_i x_s = \sum_{n-1}^{n} m_i x_i - x_s \sum_{n-1}^{n} m_i.$$

Tekintetbe véve (1)-et és (2)-t

$$N'_{yz} = N_{yz} - x_s M = N_{yz} - N_{yz} = 0.$$

Teljesen hasonlóan bizonyítható a másik két koordinátasíkra vonatkozó elsőrendű nyomatékok eltűnése is.

Ha új koordináta-rendszerünket valamelyik koordináta tengely körül elforgatjuk, az elsőrendű nyomatékok értéke változatlanul nulla marad. Igazoljuk pl. azt az esetet, mikor a Z' tengely körül β szöggel forgatunk. N'_{xy}-re állításunk nyilvánvaló. N'_{yz} ill. N'_{zx}-re pedig a következőképpen látható be: Fejezzük ki N'_{yz} ill. N'_{zx}-t a tömegpontoknak a Z' tengelytől való r_{zi} távolságaival és ezeknek a X' tengellyel bezárt α_i szögeivel (*3. ábra*).



3. ábra

$$N'_{yz} = \sum_{i=1}^{n} m_i x'_i = \sum_{i=1}^{n} m_i r'_{zi} \cos \alpha_i = 0,$$
$$N'_{zx} = \sum_{i=1}^{n} m_i y'_i = \sum_{i=1}^{n} m_i r'_{zi} \sin \alpha_i = 0.$$

A β szöggel való elforgatás után ezen kifejezésekben csak az α_i szögek változnak meg, mégpedig mindegyik β-val csökken. Így az új nyomatékok

$$\sum_{i=1}^{n} m_i r'_{zi} \cos(\alpha_i - \beta) = \sum_{i=1}^{n} m_i r'_{zi}(\cos \alpha_i \cos \beta + \sin \alpha_i \sin \beta) = \cos \beta N'_{yz} + + \sin \beta N'_{zx} = 0,$$

illetve

$$\sum_{i=1}^{n} m_i r'_{zi} \sin(\alpha_i - \beta) = \sum_{i=1}^{n} m_i r'_{zi}(\sin \alpha_i \cos \beta - \cos \alpha_i \sin \beta) = \cos \beta N'_{zx} - \sin \beta N'_{yz} = 0$$

lesznek.

Ugyanezen igazolás alkalmazható az X' és Y' tengelyek körüli elforgatásra is. Mivel három egymásra merőleges tengely körüli forgatással a koordináta-rendszer bármely térbeli elforgatása létrehozható, igazoltuk, hogy az

S ponton átmenő tetszőleges állású síkra az elsőrendű nyomaték nulla.

A (2) egyenletekből az is látható, hogy az S pontbeli tetszőleges $X'Y'Z'$ koordináta-rendszert eltolva az x_s, y_s ill. z_s közül legalább az egyik már nem nulla, és így a három elsőrendű nyomaték közül legalább egy már nem marad nulla. Tehát S-en kívül más fenti tulajdonságú pont nincsen.

Az S pontot a rendszer *tömegközéppontjának*, vagy *súlypontjának* nevezzük. Az utóbbi elnevezés onnan származik, hogy a tömegpontok egymáshoz viszonyított helyzetének megtartása, vagyis a rendszer „megmerevítése” esetén a tömegpontok súlyerőinek eredője, a térben tetszőlegesen végzett elforgatás után, a pontoknak minden helyzetében a súlyponton keresztülmenő függőleges egyenesbe esik. A következőképpen láthatjuk be, hogy ez valóban így van. Legyen a 2. ábra szerinti elrendezésnél az $X'Y'$ sík vízszintes, és határozzuk meg a gm_i függőleges (Z tengely irányú) súlyerők eredőjének a helyzetét. Pl. az Y' tengelyre felírhatjuk, hogy a súlyerők forgatónyomatékának összege szükségképpen megegyezik az eredő forgatónyomatékával. Mivel a gm_i súlyerőnek az Y' tengelyre a karja x_i a forgatónyomaték

$\sum_{i=1}^{n} g m_i x_i' = g N_{yz}' = 0$ lévén, az eredőnek az Y' tengelyre vonatkozó karja nulla, vagyis az eredőnek az $Y'Z'$ síkban kell lennie. Az X' tengelyre hasonlóképpen kiszámított forgatónyomaték is nulla, vagyis az eredő a $Z'X'$ síkban is benne fekszik. Ezért az eredő rajta fekszik e két sík metszésvonalán, a Z' tengelyen, vagyis a súlypontokon keresztülmenő merőlegesen.

A súlyponton keresztülmenő síkot *súlysíknak*, a súlyponton keresztülmenő egyenest *súlyvonalnak* hívjuk.

Az elsőrendű nyomatékok (és így M-mel osztva a súlysíkok) helyzetei az (1) egyenletek segítségével elvileg mindig meghatározhatók, gyakorlatilag azonban a térben folytonos tömegelosztás esetén az (1) egyenletekben szereplő összegezés végtelen sok tagból álló összeggé, „integrállá" alakul át. Ennek zárt alakbeli kiszámítása még az integrálszámítás ismertében sem lehetséges minden esetben. Aki pedig nem járatos az integrálszámításban, az egyszerűbb esetekben sem boldogul. Néha segítséget nyújt az, hogy *ha a tömegpontok rendszerének (ill. a testnek) szimmetriasíkja, tengelye vagy pontja van, akkor az súlysík, súlyvonal ill. súlypont.* Ez nyilvánvaló, mert a szimmetriasíkra, ill. a szimmetriatengelyen vagy ponton keresztül fektetett síkra vonatkozólag az (1) összegezésben ugyanazon tagok párosával különböző előjellel lépnek fel, és így az elsőrendű nyomaték nulla lesz. Ebből az is következik, hogy *ha a tömegpontok mind egy síkba esnek, akkor a súlypont is ebben a síkban fekszik.* Ezek általában közismert tények. A következőkben három olyan tételt fogunk ismertetni, melyeknek segítségével a nyomatékok meghatározása a legtöbb gyakorlatilag előforduló esetben folytonos tömegeloszlás esetén is integrál számítás nélkül sikerül.

A (2) egyenletekből fejezzük ki a nyomatékokat:

(4)
$$N_{yz} = MX_s; \quad N_{zx} = MY_s; \quad N_{xy} = MZ_s.$$

Ezen egyenleteket a következőképpen fogalmazzuk meg:

I. *Valamely tetszőleges síkra vonatkozó nyomatékot úgy kaphatunk meg, hogy a súlyponton keresztülmenő, az eredeti síkkal párhuzamos síkra vonatkozó nyomatékhoz* (ti. itt most: nullához) *hozzáadjuk a súlypontba képzelt egyetlen M tömegű pont nyomatékát.*

Ez a kissé bonyolultnak látszó megfogalmazás, miként később látni fogjuk, a másodrendű nyomatékokra is érvényes lesz. I.-ből következik, hogyha valamely tömegpontrendszer vagy test olyan alrendszerekre (testrészekre) bontható, melyeknek súlypontjait ismerjük, a nyomaték számításánál az alakrendszerek (testrészek) helyettesíthetők a súlypontjukba helyezett olyan tömegpontokkal, melyeknek tömege az alrendszert alkotó pontok (testrészek) egész tömegével egyenlő.

Írjuk fel pl. az YZ síkra vonatkozó elsőrendű nyomatékot a következő alakban:

(5)
$$N_{yz} = M a_x l_x,$$

ebben legyen l_x a tömegpontok rendszerének (testnek) valamilyen tetszőleges X irányú lineáris jellemző (nullától különböző) mérete (pl. valamelyik nem YZ síkban fekvő tömegpontnak x koordinátája, vagy két tetszőleges tömegpont x koordinátájának különbsége stb.) a_x az (5) egyenlet által definiált dimenzió nélküli szám, vagyis

(6)
$$a_x = \frac{N_{yz}}{M l_x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{l_x \sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{x_s}{l_x}.$$

A (6) egyenletből nyilvánvaló a következő két tétel:

II. *a_x értéke nem változik, ha mindegyik tömegpont tömegét ugyanolyan arányban növeljük, vagy csökkentjük, vagy ha mindegyik tömegpont koordinátáit ugyanolyan arányban növeljük vagy csökkentjük.*

Más szóval: hasonló tömegpontrendszerekre (testekre) a_x ugyanakkora. a_x tehát független a testek nagyságától, csak a testek alakjától és a relatív tömegeloszlástól függ.

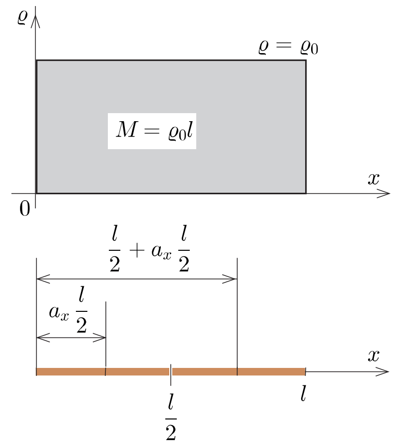
III. *a_x és az YZ síkra vonatkozó nyomaték értéke nem változik, ha az Y_i és Z_i koordinátákat tetszőlegesen megváltoztatjuk.*

Ebből következik, hogy az egyes vagy az összes Y_i és Z_i koordináták tetszőleges számmal szorozhatók, a test Y és Z tengely irányú méretei tetszőleges arányban növelhetők vagy csökkenthetők. Az utóbbi olyan mértékű is lehet, hogy minden Y_i és Z_i nullává tehető, vagyis a tömegpontok mind az X tengelyre gyűjthetők össze. (Természetesen ez az eljárás csak az a_x ill. N_{yz} értékek meghatározása szempontjából alkalmazható, ilyen átalakításnál az N_{zx} és N_{xy} értékek nem maradnak változatlanok).

A következő néhány példán bemutatjuk a törvények sokoldalú használhatóságát:

1. példa: Egyenletes tömegeloszlású (az egységnyi hosszra eső tömeg $\varrho_0 =$ állandó) l hosszúságú egyenes vonaldarab súlypontja szimmetria okokból nyilvánvalóan a vonaldarab felezési pontjában van. Ugyanazt az eredményt bonyolultabban, de a későbbi példák jobb megértése kedvéért más úton is megkaphatjuk. Határozzuk meg az ismeretlennek tekintett a_x segítségével.

A *4. ábrán* ϱ-t x függvényeként ábrázoltuk.



4. ábra

Mivel a_x értéke szempontjából csak a relatív tömegeloszlás lényeges, ϱ_0 értéktől nem függ, csak az a lényeges, hogy ϱ az egész vonaldarab mentén állandó. A beárnyékozott $M = l\varrho_0$ terület adja meg az egész vonaldarab tömegét.

Bontsuk szét a vonaldarabot felezőpontjával két darabra. Mindegyik fél vonaldarab ugyancsak egyenletes tömegeloszlású, csak az x koordináták csökkentek arányosan (ti. feleződtek). Ezért mindegyik fél vonaldarab bal oldali végpontjára a_x megegyezik az eredetiével. Mivel mindegyik fél vonaldarab feleakkora tömegű és hosszúságú, mint az eredeti, és mivel a jobb oldali vonaldarab bal oldali végpontja a kezdőponttól $l/2$ távolságra van, az I. tétel alapján az (5) egyenlet segítségével a nyomatékra a következő egyenletet írhatjuk fel:

$$Ma_x l = \frac{M}{2} a_x \frac{l}{2} + \frac{M}{2}\left(\frac{l}{2} + a_x \frac{l}{2}\right).$$

Ml-lel egyszerűsítve a_x-re a következő elsőfokú egyenletet kapjuk:

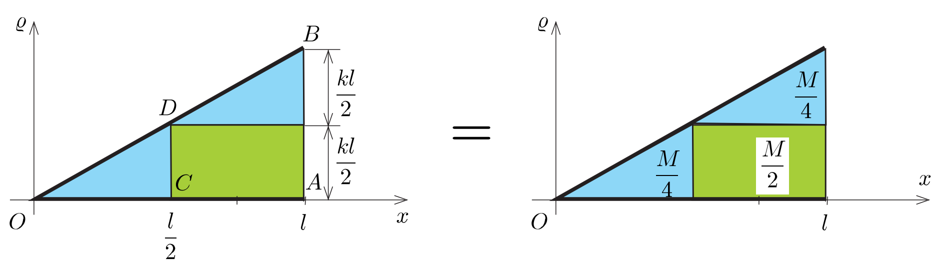
$$a_x = \frac{a_x}{4} + \frac{1}{4} + \frac{a_x}{4},$$

ebből $a_x = \frac{1}{2}$, vagyis: $x_s = \frac{1}{2} l$.

2. példa: Határozzuk meg az l hosszúságú lineárisan növekedő sűrűségű ($\varrho = kx$) egyenes vonal darab súlypontját. Mivel

$$\varrho = kx = k\frac{l}{2} + k\left(x - \frac{l}{2}\right),$$

a vonaldarabot az előző módon megfelezve, a jobb oldali fél vonaldarab egy állandó sűrűségű és egy a bal oldali vonaldarabbal megegyező tömegeloszlású vonaldarabra bontható szét. Az egész és a fél vonaldarabok tömegét megint az árnyékozott területek adják meg. Ha az egész vonaldarab tömege $M = kl^2/2$, az *5. ábra* szerint a bal oldali félé $M/4$, az állandó sűrűségűé pedig $M/2$.



5. ábra

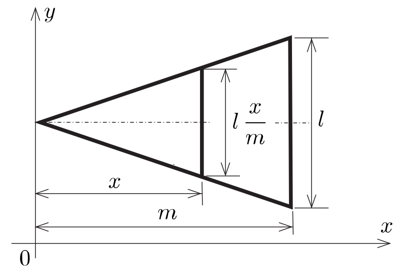
A bal oldali vonaldarabon és az egész vonaldarabon a_x most is azonos. Ez az $OCD\triangle$ és $OAB\triangle$ hasonlóságából következik, mert hiszen a III. tétel szerint a_x változatlan marad az x koordinátáknak és a ϱ sűrűségnek állandóval való szorzására. Ezért az a_x-re az előző példához hasonló meggondolásokkal most a következő egyenletet kapjuk:

$$Ma_x l = \frac{M}{4} a_x \frac{l}{2} + \frac{M}{4}\left(\frac{l}{2} + a_x \frac{l}{2}\right) + \frac{M}{2}\left(\frac{l}{2} + \frac{1}{2}\frac{l}{2}\right),$$

itt az utolsó tag az állandó sűrűségű rúd nyomatéka.

Ebből: $a_x = \frac{2}{3}$ és $x_s = 2l/3$.

3. példa: *Egyenletes tömegeloszlású* (felületegységenként állandó sűrűségű) *háromszög súlypontjának meghatározása.* Koordináta-rendszerünket vegyük fel a *6. ábrán* látható módon.

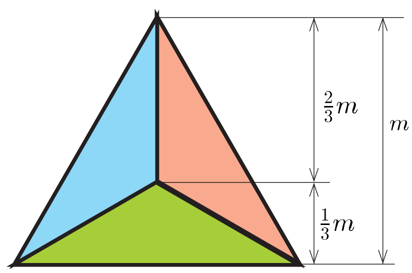


6. ábra

Mivel az x távolsággal a szélességi méret lineárisan nő, a háromszög azonos x koordinátáinak pontjait a III. szerint az X tengelyre gyűjtve össze, lineárisan növekvő sűrűségű vonalat kapunk, vagyis a 2. példát kapjuk. Valóban közismerten a háromszög súlypontja a csúcspontjából $2/3\ m$ távolságban az alappal párhuzamos egyenesen fekszik.

Ugyanezt az eredményt másképpen is megkaphatjuk. A II. és III. tétel szerint a súlypont távolsága azonos minden m magasságú háromszögre. (A két tétel által megengedett transzformációk segítségével bármely két ilyen háromszög egymásba transzformálható.) Határozzuk meg a legegyszerűbbre, az egyenlő oldalú háromszögre.

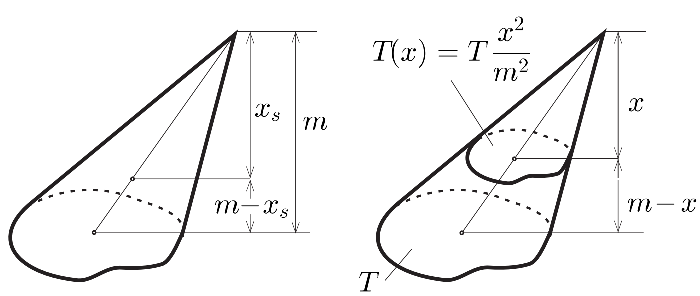
Mivel a súlypont a szimmetriatengelyeken fekszik, összeesik a magassági ponttal, a belül írható kör középpontjával stb. Ebből a pontból a háromszöget a *7. ábra* szerinti három egybevágó háromszögre bonthatjuk, ezek területe tehát harmada az eredeti háromszögének, mivel a lenti háromszög alapja megegyezik az eredeti háromszögével, magasságának harmadakkorának kell lennie. Vagyis a súlypont a csúcsponttól számítva valóban $2/3\ m$ távolságra van.



7. ábra

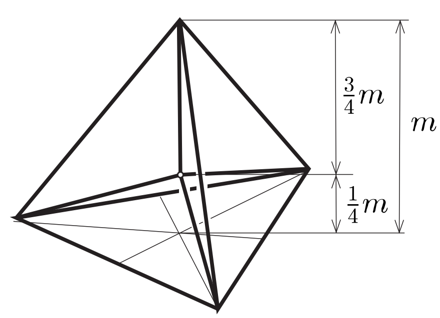
4. példa: *Tetszőleges alapgörbéjű, homogén sűrűségű kúp súlypontjának távolsága az alaptól.*

Mindezen kúpok közös tulajdonsága, hogy a csúcsponttól x távolságra levő alappal párhuzamos metszetük területe négyzetesen nő az x távolsággal (*8. ábra*).



8. ábra

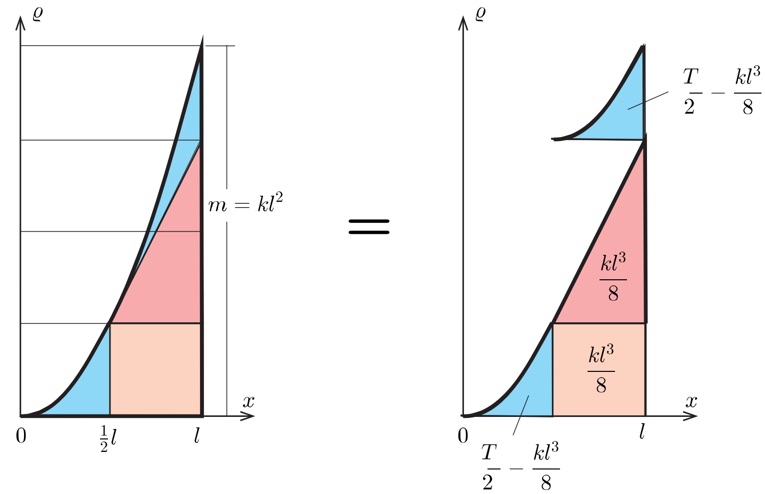
a_x szempontjából tehát mindezen kúpok egymásba transzformálhatók. Ezért a_x megegyezik a négyzetesen növekvő sűrűségű vonaldarab a_x-ével, amire még visszatérünk. a_x-et legegyszerűbben a szabályos tetraédernél határozhatjuk meg az egyenlő oldalú háromszöghöz hasonló módon (*9. ábra*).



9. ábra

A szimmetriasíkok metszéspontjában levő súlypontot a csúcsokkal összekötve, négy egybevágó gúlát kapunk, melyek közül az alsónak alaplapja megegyezik az eredeti tetraéder alaplapjával, így a súlypontnak az alaplap felett $1/4\ m$ magasságban, a csúcsponttól $3/4\ m$ magasságban kell lennie. Vagyis $a_x = 3/4$.

5. példa: Ha ismerjük a parabola területi képletét, a 2. példában alkalmazott eljárással megkaphatjuk a négyzetesen növekvő sűrűségű egyenes vonaldarabra ugyanazt az $a_x = 3/4$-et. Mi most fordítva fogunk eljárni, a_x-et az előző példából ismerve, a $\varrho = kx^2$ parabola és az X tengely közti területet határozzuk meg (*10. ábra*).



10. ábra

Vizsgáljuk tehát a $\varrho = kx^2$ négyzetesen növekvő sűrűségű vonaldarabot. Mivel:

$$kx^2 = k\left(x - \frac{l}{2}\right)^2 + kl\left(x - \frac{l}{2}\right) + k\frac{l^2}{4},$$

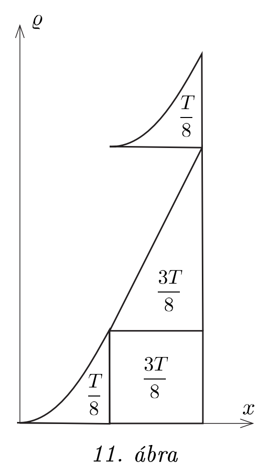
az l távolságot megfelezve, a jobb oldali rész területe egy téglalap, egy vele azonos területű háromszög és egy a bal oldali résszel megegyező parabolának a területéből tevődik össze. Azért, ha az egész rúd tömegét, vagyis a keresett területet T-vel jelöljük, a kis parabolák területe $\frac{T}{2} - \frac{kl^3}{8}$ lesz. Most alkalmazzuk szokásos módszerünket, tudván, hogy parabolára $a_x = 3/4$, háromszögre $2/3$, téglalapra $1/2$.

$$T\frac{3}{4}l = \left(\frac{T}{2} - \frac{kl^3}{8}\right)\frac{3}{4}\frac{l}{2} + \frac{kl^3}{8}\left(\frac{1}{2}l + \frac{1}{2}\frac{l}{2}\right) + \frac{kl^3}{8}\left(\frac{1}{2}l + \frac{2}{3}\frac{l}{2}\right) + \left(\frac{T}{2} - \frac{kl^3}{8}\right)\left(\frac{1}{2}l + \frac{3}{4}\frac{l}{2}\right).$$

Ezt T-re megoldva:

$$T = \frac{kl^3}{3} = \frac{lkl^2}{3} = \frac{lm}{3},$$

a területi képlet tehát szavakkal: *alap szorozva a magassággal és osztva hárommal.*



11. ábra

A 10. ábrabeli felosztás T ismeretében a *11. ábrán* látható módon alakul.

Bodó Zalán