I. megoldás. A derékszög csúcsát az átfogó fölötti Thalész-körből az átfogóra merőleges m_c magasság ismeretében fogjuk kimetszeni, az átfogóval párhuzamos, tőle m_c távolságban haladó egyenessel. A terület 2-szeresének kétféle kifejezése, valamint (1) alapján

$$m_c = \frac{ab}{c} = \frac{a+b}{3},$$

eszerint

$$a+b = 3m_c, \qquad ab = cm_c.$$

Így pedig Pitagorasz tétele alapján

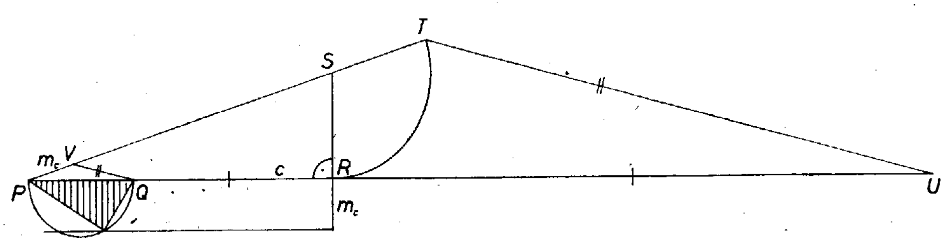
$$a^2+b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 9m_c^2 - 2cm_c = c^2,$$

aminek egyetlen pozitív gyöke

$$m_c = c\cdot\frac{1+\sqrt{10}}{9}\ (\approx c\cdot 0{,}46),$$

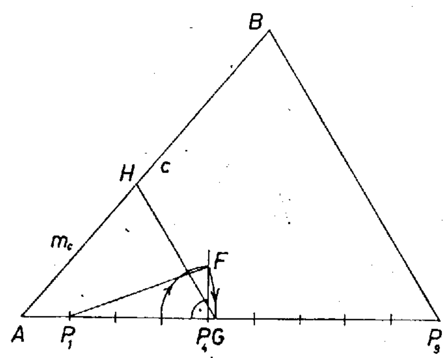
kisebb a Thalész-kör $c/2$ sugaránál, tehát van megoldás, éspedig a szimmetria miatt lényegében egyetlen megoldás van.

m_c egy lehetséges szerkesztése: derékszögű háromszöget szerkesztünk $PR = 3PQ = 3c$ és $RS = c$ befogókból, az átfogó S-en túli meghosszabbítására $ST = c$-t, PR-nek R-en túli, meghosszabbítására $RU = 2PR$-et mérünk fel, végül PS-et metsszük a Q-n átmenő, TU-val párhuzamos egyenessel V-ben, ekkor $PV = m_c$ (1. ábra).



1. ábra

Megjegyzés. Az m_c szakasz egy más megszerkesztése: az $AB = c$ szakasz A végpontjából tetszőleges irányban 9 egységnyi szakaszt mérünk fel, végpontjaik $P_1, P_2, \ldots, P_9$. P_4-ben merőlegesen felmérjük $P_4F = 1$-et, F-et P_1 körül ráforgatjuk P_1P_9-re, G-be, ekkor a G-n átmenő, BP_9-cel párhuzamos egyenes AB-ből $AH = m_c$ szakaszt metsz le (2. ábra).



2. ábra

Komjáth Péter (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., II. o. t.)

II. megoldás. Felhasználhatjuk, hogy a derékszögű háromszög megszerkeszthető átfogójának és a derékszög felezőjének hosszából, [1] ugyanis (1) alapján a mondott f_c felező a minden háromszögre érvényes összefüggésből könnyen kifejezhető:

$$f_c = \frac{2ab\cos\gamma/2}{a+b} = \frac{2c}{3}\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{c}{\sqrt{2}},$$

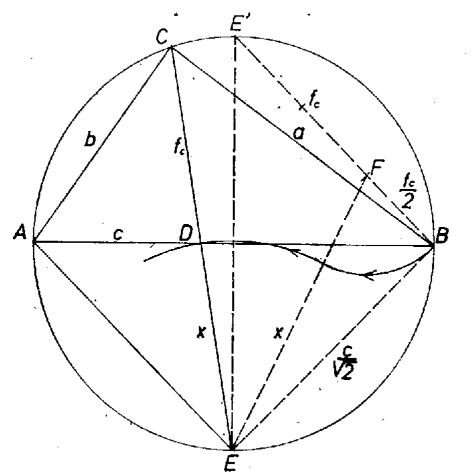
a c átfogójú egyenlő szárú derékszögű háromszög befogójának 2/3 része.

[1] Lásd pl. 1123. feladat, K. M. L. 24 (1962) 201. o.; a derékszög helyén tetszőleges szög is állhat.

Messe az ACB derékszög felezője az AB átfogót D-ben, az átfogó Thalész-körét E-ben. Ekkor E felezi a C-t nem tartalmazó AB ívet, $EAD\sphericalangle = ECA\sphericalangle$, $EAD_\triangle \sim ECA_\triangle$, és $ED = x$ jelöléssel $x(x + f_c) = EA^2 = c^2/2$, amiből

$$x = \sqrt{\frac{c^2}{2} + \frac{f_c^2}{4}} - \frac{f_c}{2}.$$

Ennek alapján D kimetszhető, végül ED a körből kimetszi C-t. (3. ábra, AE-nek BE' tükörképét harmadoltuk az F ponttal, ekkor $x = EF - FB$.)



3. ábra

Szamosújvári Sándor (Debrecen, KLTE Gyak. Gimn., III. o. t.)