Haladók (II. osztályosok) *versenye*

1. feladat. $\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}=?$

I. megoldás. A kérdéses szám pozitív és négyzete:

$$\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^2=7+4\sqrt{3}+2\sqrt{(7+4\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})}+$$
$$+7-4\sqrt{3}=14+2\sqrt{49-48}=16,$$

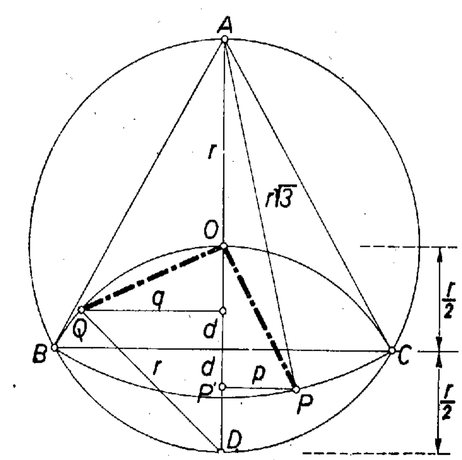
tehát a kifejezés értéke $\sqrt{16}=4$.

II. megoldás. Észrevehetjük, hogy $7+4\sqrt{3}=(2+\sqrt{3})^2$, és $7-4\sqrt{3}=(2-\sqrt{3})^2$. Mivel itt$2>\sqrt{3}$, így

$$\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4.$$

2. feladat. *Legyen az ABC szabályos háromszög köré írt kör középpontja O, és a kör A pontjából kiinduló átmérőjének másik végpontja D. Rajzoljuk meg az A, illetőleg a D középpontú (félkörnél kisebb) BC köríveket. Legyen e két körív egy–egy pontja P, illetőleg Q. Bizonyítsuk be, hogy ha P és Q pontok egyenlő távol vannak a BC oldaltól, akkor egyenlő távol vannak az O ponttól is.*

Megoldás. Legyen P, ill. Q vetülete az AD átmérőn P', ill. Q', és jelöljük a háromszög köré irt kör sugarát r-rel. Így a D középpontú BC körív sugara szintén r, a háromszög oldalának és az A középpontú BC körív sugarának hossza pedig $AB=r\sqrt{3}$. P és Q-nak BC-től mért (egyenlő) távolságát jelöljük d-vel, míg AD-től mért távolságuk legyen $PP'=p$ és $QQ'=q$.



Kifejezzük OP és OQ hosszát r-rel és d-vel és az így nyert kifejezéseket összehasonlítjuk. Az OPP' és az APP' derékszögű háromszögből

$$OP^2=\left(\frac{r}{2}+d\right)^2+p^2, \qquad p^2=(r\sqrt{3})^2-\left(\frac{3r}{2}+d\right)^2,$$

és így

$$OP^2=3r^2+\left(\frac{r}{2}+d\right)^2-\left(\frac{3r}{2}+d\right)^2=3r^2-r(2r+2d)=r(r-2d).$$

Hasonlóan az OQQ' és a DQQ' derékszögű háromszögből

$$OQ^2=\left(\frac{r}{2}-d\right)^2+q^2,$$
$$q^2=r^2-\left(\frac{r}{2}+d\right)^2,$$

és így

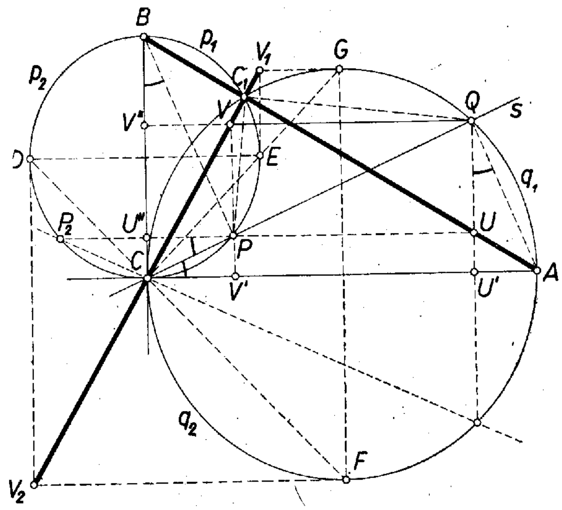
$$OQ^2=r(r-2d)=OP^2.$$

Miután OP és OQ értelemszerűen pozitívok, eredményünk a feladat állítását bizonyítja.

Megjegyzés. Ha P és Q mindegyikét a felhasznált köröknek a félkörnél nagyobb ívén vesszük fel a BC egyenestől egyenlő távolságban, akkor hasonló számítással ismét azt nyerjük, hogy P és Q egyenlő távolságra van O-tól is.

3. feladat. *Egy derékszögű háromszög befogói mint átmérők fölé köröket rajzolunk. A derékszög csúcson átmenő tetszőleges egyenesnek a körökkel való második metszéspontja legyen a P, illetőleg Q pont. Mi azon derékszögű háromszögek harmadik csúcsainak mértani helye, melyeknek átfogója a PQ szakasz, befogói pedig párhuzamosak az adott háromszög befogóival?*

Megoldás. Legyen az ABC derékszögű háromszög CB, CA befogója fölé írt kör p, ill. q, és messe ezeket a C-n átmenő s egyenes másodszor P, Q-ban. PQ mint átfogó fölé a CB, CA-val párhuzamos befogókkal két derékszögű háromszöget szerkeszthetünk, legyenek ezek csúcsai U és V úgy, hogy $PU \parallel CA$ és $QU \parallel CB$, ill. $PV \parallel CB$ és $QV \parallel CA$. A keresett mértani helyet mindazok és csak azok a pontok alkotják, amelyek akár U, akár V gyanánt fellépnek, mialatt s minden lehetséges helyzetét felveszi, azaz C körül $180°$-kal elfordul.



Tekintsük az U csúcsok mértani helyét. Néhányukat megszerkesztve mindegyiket az AB átfogón kapjuk. Megmutatjuk, hogy az U pontok mértani helye az AB szakasz. E szakasz meghosszabbításaira nem eshet U pont, hiszen a p-n fekvő P, és vele U sem juthat távolabb CA-tól, mint B és CA-nak csak azon az oldalán lehet, mint B, továbbá a q-n fekvő Q-val együtt U nem juthat távolabb CB-től, mint A, a CB-nek azon az oldalán van, mint A.

Legyen U vetülete CA-ra, CB-re U', U''. Megmutatjuk, hogy s helyzetétől függetlenül $U'U : U'A = CB : CA$; ebből következik, hogy $U'AU$ és CAB derékszögű háromszögek hasonlók, és ebből $U'AU\sphericalangle = CAU\sphericalangle = CAB\sphericalangle$, tehát AU egyenes egybeesik AB-vel. – Thalész tétele szerint BP és AQ merőlegesek s-re, és ezért a PCU'', BCP, CAQ, QAU' derékszögű háromszögek hasonlók, mert megfelelő hegyes szögeik vagy közösek, vagy párhuzamos, vagy merőleges szárúak, és így egyenlők. Másrészt a $CU'UU''$ négyszög téglalap, ezért

$$\frac{U'U}{U'A} = \frac{CU''}{U'A} = \frac{CP}{AQ} = \frac{CB}{AC},$$

amit bizonyítani akartunk.

Ha $s \equiv CA$, akkor $P \equiv C$ és $Q \equiv A$, tehát $PQ \equiv CA$, e helyzetben $U \equiv A \equiv Q$, a PQU háromszög nem létezik, tehát az A pont csak tágabb értelemben tartozhat a mértani helyhez. Hasonlóan $s \equiv CB$ esetén sincs háromszög, mert $PQ \equiv BC$ és $U \equiv C$. Végül akkor sem jön létre a $PQU\triangle$, ha s átmegy p és q második közös pontján – ami nyilván C-nek AB-re való C_1 vetülete –, mert ekkor $P \equiv Q$.

Fordítva megmutatjuk, hogy ha U az AB szakasznak C_1-től különböző tetszés szerinti belső pontja, akkor van s-nek olyan helyzete, amely éppen ezen U-hoz vezet, éspedig 2 ilyen helyzet is van és ezek CA-ra (egyszersmind CB-re is) tükrösek. Legyen p, q-nak a $90°$-os ACB szögtartományba – röviden: γ-ba – eső félköre p_1, q_1, és a másik félköre p_2, q_2. Messe az U-n átmenő, CA-val párhuzamos egyenes p_1-et, CB-t, p_2-t rendre P, U'', P_2-ben. A mértani helynek az s egyenes CP és CP_2 helyzetéhez tartozó pontja rajta van PU''-n és a már bizonyítottak szerint az AB egyenesen, tehát éppen a kiindulásul választott U pont.

Mivel P és P_2 a BC tengelyre tükrös pontpár, azért P_2C a PC tükörképe a BC tengelyre s ekkor egyben a BC-re merőleges AC tengelyre is.

$U \equiv A$ esetén $P \equiv P_2 \equiv C$; $Q \equiv A$, $PQ \equiv CA$; ugyanígy $U \equiv B$ esetén $PQ \equiv BC$, e helyzetekhez nem tartozik PQU háromszög. Bizonyításunknak a P_2-re vonatkozó része azonban $U \equiv C_1$-re is érvényes.

Ezek szerint az U pontok mértani helye valóban az AB átfogószakasz, kétszer számítva, de a végpontok nélkül, és C_1-et csak egyszer számítva.

Egész hasonlóan járhatunk el a V pontok mértani helyének meghatározására is. Jelöljük V-nek CA, CB-re való vetületét V', V''-vel. Ekkor a fenti hasonlóságok felhasználásával

$$\frac{V'C}{V'V} = \frac{PU''}{U'Q} = \frac{PC}{QA} = \frac{CB}{CA},$$

tehát a VCV' és ABC derékszögű háromszögek hasonlók, és így $VCV'\sphericalangle = ABC\sphericalangle = C_1CA\sphericalangle$.

Ha már most P a p_1 félkörön van, és így Q a q_1-nek pontja, akkor V a γ-ban fekszik, V' a CA-n van, tehát a nyert egyenlőségből $VCA\sphericalangle = C_1CA\sphericalangle$, vagyis VC azonos a C_1C egyenessel, V a C_1C-n fekszik. Ha P a p_2 félkörön, és ezért Q a q_2-n van, akkor V a γ csúcsszögtartományában van, V' a CA-nak C-n túli meghosszabbításán, tehát egyenlőségünk szerint VCV' és C_1CA csúcsszögek, ezért V ekkor is a C_1C egyenesen van. C_1C merőleges AB-re.

Legyen p-nek CA-val, q-nak CB-vel párhuzamos átmérője DE, ill. FG, E a p_1-en, G a q_1-en. Ekkor P-nek és vele V-nek CB-től legnagyobb távolsága mindkét oldalon $DE/2 = BC/2$. Ha $P \equiv E$, akkor $PCB\sphericalangle = 45^\circ = PCA\sphericalangle$, ezért CP a q_1-et $Q \equiv G$-ben metszi, amely q-nak CA-tól ugyancsak legtávolabbi pontja; az ezekhez tartozó V-helyzet legyen V_1. Ha pedig P a D-ben van, akkor Q az F-be jut, az ezekhez tartozó V_2 a másik oldalon van a lehető legtávolabbra CB, ill. CA-tól. Ezekkel a fentiekhez hasonlóan megmutatható, hogy a V pontok mértani helye a V_1V_2 szakasz, kétszer számítva, de kihagyva C-t, és csak egyszer számítva a C_1, V_1, V_2 pontokat. Könnyű belátni, hogy $V_1V_2 = AB$ és C felezi V_1V_2-t. Ha az ABC háromszög egyenlő szárú, akkor $C_1 \equiv E \equiv G$, és ez a pont nem szerepelhet V gyanánt.

Mindezek szerint valamennyi vizsgált derékszögű háromszög harmadik csúcsának mértani helye – míg s minden lehetséges helyzetét felveszi – tágabb értelemben az AB átfogó és az a rá merőleges, vele egyenlő hosszú V_1V_2 szakasz, melynek felezőpontja C, mindkettő kétszer számítva. Szigorúan véve – ha ti. az egyenesszakasszá, ponttá fajuló háromszögeket nem tekintjük – A, B, C nem tartoznak a mértani helyhez, V_1 és V_2 csak egyszer számítandók, a két szakasz C_1 metszéspontja általában összesen kétszer, kivéve a $CA = CB$ esetet, amikor $C_1 \equiv V_1$, és ezért csak egyszer számítható.

Megjegyzések. 1. A verseny rövid ideje alatt természetesen nem volt várható, hogy a versenyzők a fenti finomabb diszkussziót is kidolgozzák. Mulasztás lenne viszont, ha itt erre nem tértünk volna ki.

2. Azt, hogy U az AB-n, V a V_1V_2 -n van, ugyancsak szögek egyenlősége alapján, de hasonló háromszögek felhasználása nélkül is beláthatjuk. Ezt csak U esetére és olyan helyzetre vázoljuk, amelyben P a p_1-beli CC_1 íven van, és így Q a q_1-beli AC_1 ív pontja. AQC_1C és BC_1PC húrnégyszögek, ezért $PC_1Q\sphericalangle = PC_1A\sphericalangle + AC_1Q\sphericalangle = PCB\sphericalangle + ACQ\sphericalangle = ACB\sphericalangle = 90^\circ$. Másrészt szerkesztésnél fogva $PUQ\sphericalangle = 90^\circ$, így $PUQC_1$ húrnégyszög. Ennélfogva $UC_1Q\sphericalangle = UPQ\sphericalangle$, és ez folytatólag egyenlő $ACQ\sphericalangle$-gel – mert $PU \parallel CA$ –, végül $AC_1Q\sphericalangle$-gel. Eszerint C_1Q-val C_1U és C_1A egyenlő szöget zár be, tehát U a C_1A egyenesen van. – Húrnégyszögek felhasználásával igazolható fordítva az is, hogy AB és V_1V_2 bármely pontja hozzátartozik a mértani helyhez. Ezt és a további helyzetek vizsgálatát az olvasóra bízzuk.