Kezdők (I. osztályosok) *versenye*

1. feladat. *Oldjuk meg x-re a következő egyenletet:*

$$\frac{p}{q}-\frac{px}{qx-1}=\frac{q}{p}-\frac{qx}{px-1}.$$

p és q milyen értékeinél van gyöke az egyenletnek?

Megoldás. Az egyenletnek nincs értelme, ha valamelyik nevező 0; feltesszük tehát, hogy $p\neq 0$, $q\neq 0$, és nem fogadunk el olyan p, q számpárt, amelyből $px-1=0$, $qx-1=0$, vagyis $px=1$, $qx=1$ adódik. A nevezők szorzatával szorozva

$$p^2(qx-1)(px-1)-p^2qx(px-1)=q^2(qx-1)(px-1)-pq^2x(qx-1).$$

A zárójelek felbontása, rendezés és összevonás után x-re elsőfokú egyenletet kapunk:

$$(p^3-q^3)x=p^2-q^2.$$

Ha $p=q$, akkor ez az egyenlet – és természetesen az eredeti is – minden x-re teljesül, nincs határozott, egyértelmű megoldás. Ha $p\neq q$, akkor $p^3-q^3\neq 0$-val osztva és $p-q$-val egyszerűsítve:

$$x=\frac{p+q}{p^2+pq+q^2}.$$

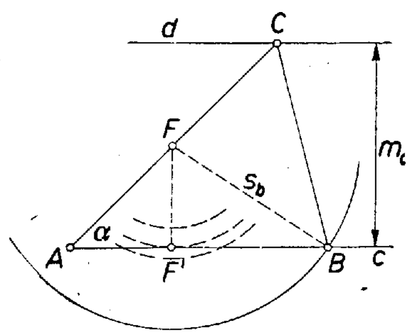
Ezzel az egyenletet megoldottuk. Látható, hogy

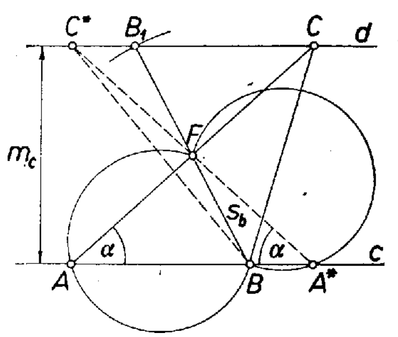
$$px=\frac{p^2+pq}{p^2+pq+q^2}=1$$

csak $q=0$ mellett, $qx=1$ pedig csak $p=0$ mellett következnék be. Ezeket már kizártuk, tehát az egyenletnek mindig van határozott gyöke, ha $p\neq 0$, $q\neq 0$, és $p\neq q$.

2. feladat. *Szerkesszük meg az ABC háromszöget, ha ismerjük A-nál levő szögét, B-ből kiinduló súlyvonalát és C-ből kiinduló magasságvonalát. Magyarázzuk meg a szerkesztés minden lépését.*

I. megoldás. Legyen az adott magasság m_c, a súlyvonal s_b, A C csúcsot az α szög $AB=c$ szárától m_c távolságra haladó d párhuzamos metszi ki a másik szárból. Az AC oldal F felezőpontjából s_b sugárral rajzolt kör kimetszi az α szög c szárából a B csúcsot.





A feladat megoldhatóságának eleve feltétele, hogy $0<\alpha<180^\circ$ legyen. Így C mindig egyértelműen szerkeszthető. A feladatnak 1, 2, 1, vagy 0 megoldása van aszerint, hogy a használt körív az α szög másik szárát 1, vagy 2 pontban metszi, vagy érinti, vagy nem is érinti. Az F pont merőleges vetületét AB-n F'-vel jelölve $\alpha<90^\circ$ mellett az említett négy eset valamelyike aszerint áll fenn, hogy

$$s_b\geqq FA,\ FA>s_b>FF',\ s_b=FF',\ s_b<FF' \qquad (FF'=m_c/2).$$

Ha $\alpha\geqq 90^\circ$, akkor legfeljebb 1 megoldás van, $s_b>FA$ mellett.

II. megoldás. B-nek F-re vett B_1 tükörképe a C-n át AB-vel párhuzamos d egyenesen van. Ebből adódik a következő szerkesztés.

Felveszünk két egymástól m_c távolságra fekvő c és d párhuzamost és c-n a B csúcsot. A B-körüli $2s_b$ sugarú körívvel d-ből kimetsszük B_1-et. BB_1-nek F felezőpontja és a B pont alkotta szakasz A-ból α szög alatt látszik, tehát az A csúcs a c egyenes és a BF fölé rajzolt α nyílású látószögkörívpár metszéspontja. Végül A tükörképe F-re C.

Ha $2s_b<m_c$, akkor B_1 nem szerkeszthető, a feladatnak nincs megoldása. Ha $2s_b\geqq m_c$, akkor 2, 1, vagy 0 a megoldások száma aszerint, hogy a BF fölé rajzolt két körív mindegyike metszi c-t a B-től különböző pontban, vagy csak egyikük, vagy egyikük sem.

3. feladat. *Bizonyítsuk be, hogy ha egy 7-tel osztható háromjegyű szám utolsó két számjegye egyenlő, akkor számjegyeinek összege is osztható 7-tel.*

I. megoldás. A feladat teljes értékű megoldásának számít, ha a két egyenlő jegyre végződő háromjegyű számok közül kikeressük az összes 7-tel oszthatókat és mindezeken ellenőrizzük, hogy számjegyeik összege valóban osztható-e 7-tel. (Ilyen eljárást azonban csak akkor ügyes használni, ha valamilyen rendszerezéssel munkamegtakarítást tudunk elérni az egyenkénti kikereséssel szemben.)

A kérdéses számok kiválogatását könnyűvé teszi a következő észrevétel. A számokat két rész összegére bontva: a százasra és a két egyenlő jeggyel írt számra, ezeknek 7-tel való osztási maradéka vagy mindkét részben 0, vagy összegük 7. (Pl. $322 = 7 \cdot 46$-ban 300 és 22-nek 7-es maradéka 6, illetőleg 1.) Állítsuk tehát össze, mely két egyenlő jeggyel írt számok adnak 7-tel osztva 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 maradékot, másrészt, hogy mely kerek százasok adnak rendre 0, 6, 5, 4, 3, 2, 1 maradékot, ezek összeadásából megkapjuk valamennyi szóban forgó számot.

Maradék	Végződés	Maradék	Százas	A szám	A jegyek összege
0	00, 77	0	700	700, 777	7, 21
1	22, 99	6	300	322, 399	7, 21
2	44	5	600	644	14
3	66	4	200, 900	266, 966	14, 21
4	11, 88	3	500	511, 588	7, 21
5	33	2	100, 800	133, 833	7, 14
6	55	1	400	455	14

Valóban valamennyi számban a számjegyek összege osztható 7-tel.

II. megoldás. Legyen a szóban forgó háromjegyű szám $\overline{abb} = 100a + 10b + b = 100a + 11b$, így számjegyeinek összege $a + 2b$.Tegyük fel, hogy $N = 100a + 11b$ 7-nek többszöröse, be kell bizonyítanunk, hogy akkor $a + 2b$ is osztható 7-tel. Vonjuk ki N-ből a 7-tel szintén osztható $98a + 7b$-t, a maradék: $2a + 4b = 2(a + 2b)$ szintén osztható 7-tel. Mivel 7 és 2 relatív prím számok, ez csak úgy lehetséges, ha $a + 2b$ osztható 7-tel.[1]

Megjegyzések. 1. A II. megoldás bizonyítása meg is fordítható, és így igaz a következő állítás: ha egy háromjegyű szám utolsó két jegye megegyezik, és számjegyeinek összege osztható 7-tel, akkor a szám is osztható 7-tel; ha pedig a számjegyek összege nem osztható, akkor a szám sem osztható 7-tel.

2. Az algebrai megoldás többet igazol a bizonyítandó tételnél: nemcsak háromjegyű, hanem bármely $100a+11b$ alakú szám ahol a és b tetszőleges egész számok – akkor és csak akkor osztható 7-tel, ha $a+2b$ osztható. Pl. $100 \cdot 243 + 11 \cdot 22 = 24\,542$ szám esetén $243 + 2 \cdot 22 = 287$ osztható 7-tel, tehát a szám is osztható 7-tel. Mivel azonban általában nem könnyű egy egész számról azt megállapítani, hogy írható-e egész a, b-vel $100a + 11b$ alakban, ahol $b \geqq 10$, azért ez a tétel oszthatósági vizsgálatok könnyítésére csak két egyező jegyre végződő számoknál lehet hasznos.

[1] Ez pl. abból következik, hogy $4 \cdot 2(a + 2b) = 7(a + 2b) + (a + 2b)$ is, és így $a + 2b$ is osztható 7-tel.