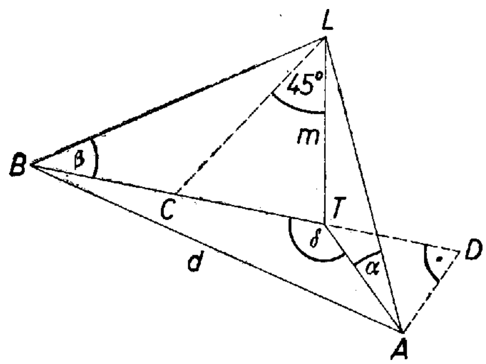
1. feladat. *Egy léggömb középpontját két földi megfigyelő 45°, illetőleg $22{,}5^\circ$ emelkedési szögben látja. Az első megfigyelő délre, a második északnyugatra van a léggömb talppontjától, egymástól való távolságuk 1600 méter. Milyen magasan lebeg a léggömb a vízszintes talaj fölött?*

I. megoldás. Legyen a léggömb L, merőleges vetülete a vízszintes talajon (talppontja) T; a megfigyelők A és B; a léggömb emelkedési szöge az A pontból $\alpha = 45^\circ$, a B pontból $\beta = 22{,}5^\circ$, a két megfigyelő távolsága $AB = d = 1600$ m, a TA déli és TB északnyugati irányok hajlásszöge $\delta = 135^\circ$ (1. ábra).



1. ábra

– Az ATL derékszögű háromszög egyenlő szárú, mert $\alpha = 45^\circ$, tehát AT egyenlő a keresett TL magassággal – jelöljük ezt röviden m-mel. Húzzunk a BTL háromszög L csúcsából LT-vel 45°-ot bezáró egyenest. Mivel $BLT\sphericalangle = 90^\circ - LBT\sphericalangle = 67{,}5 > > 45^\circ$, azért egyenesünk a BT szakaszt metszi egy C pontban. $TC = TL = m$ és $BLC\sphericalangle = BLT\sphericalangle - 45^\circ = 22{,}5^\circ = TBL\sphericalangle = CBL\sphericalangle$, vagyis a BCL háromszög egyenlő szárú: $BC = CL = m\sqrt{2}$.

Jelöljük az A pont merőleges vetületét a BT egyenesen D-vel. Ekkor az ADT derékszögű háromszög is egyenlő szárú, mert T-nél levő szöge $ATD\sphericalangle = 180^\circ - ATB\sphericalangle = 45^\circ$, s így $AD = DT = m/\sqrt{2}$.

Az ABD derékszögű háromszög átfogójának hossza adott: $d = 1600$ m, befogóit pedig sikerült kifejezni a keresett m magassággal: $AD = m/\sqrt{2}$, $BD = BC + CT + TD = m\sqrt{2} + m + m/\sqrt{2}$. Így Pythagorász tétele szerint

$$AD^2 + DB^2 = \left(\frac{m}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(m\sqrt{2} + m + \frac{m}{\sqrt{2}}\right)^2 = AB^2 = 1600^2.$$

Innen

$$m^2\left(\frac{1}{2} + 2 + 2\sqrt{2} + 1 + 2 + \sqrt{2} + \frac{1}{2}\right) = m^2 3\sqrt{2}(\sqrt{2}+1) = 1600^2,$$

vagyis

$$m = \frac{1600}{\sqrt{3\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}} = \frac{1600\sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt{3\sqrt{2}}} = \frac{800}{3}\sqrt{\sqrt{8}(\sqrt{2}-1)\cdot 3} = \frac{800}{3}\sqrt{12-\sqrt{72}} \approx 500 \text{ m}$$

(méterre kerekítve).

II. megoldás. A feladatot általánosan, a talpponton átmenő vízszintes síkban tetszőleges helyzetű A és B megfigyelők és tetszőleges hegyes α és β emelkedési szögek esetére oldjuk meg.

Az ATL, BTL derékszögű háromszögből $AT = m \operatorname{ctg}\alpha$, $BT = m\operatorname{ctg}\beta$, és így az ATB háromszögből a koszinusz-tétel alapján

$$\begin{aligned} d^2 &= m^2\operatorname{ctg}^2\alpha + m^2\operatorname{ctg}^2\beta - 2m^2\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta\cos\delta = \\ &= m^2(\operatorname{ctg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\beta - 2\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta\cos\delta), \end{aligned}$$

és innen

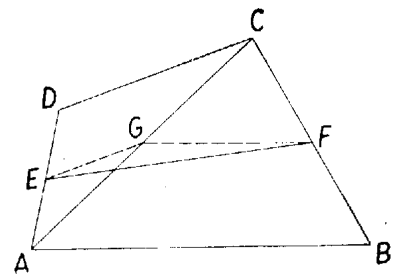
$$m = \frac{d}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\beta - 2\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta\cos\delta}}.$$

(Ha ABT valóságos háromszög, akkor a négyzetgyök alatt álló kifejezés pozitív, mert a koszinusz-tétel érvényes.)

A $d = 1600$ m, $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 22{,}5^\circ$, $\delta = 135^\circ$ adatokkal $m \approx 500$ m.

2. feladat. *Bizonyítsuk be, hogy ha egy négyszög két szemben fekvő oldalának felezőpontjait összekötő szakasz egyenlő a másik két oldal számtani közepével, akkor a négyszög trapéz.*

Megoldás. Legyen az $ABCD$ négyszög (2. ábra) AD és BC oldalának felezőpontja E és F, és $EF = (AB+DC)/2$.



2. ábra

Azt fogjuk bebizonyítani, hogy AB és CD párhuzamosak. Jelöljük az AC átló felezőpontját G-vel. Ekkor egyrészt EG, mint az ACD háromszög középvonala, párhuzamos DC-vel és fele akkora; és hasonlóan az ABC háromszög GF középvonala párhuzamos AB-vel és fele akkora. Másrészt az EFG háromszögből – ha ez valódi háromszög, tehát G nem esik az EF egyenesre –

$$EF < EG + GF = \frac{1}{2}(DC + AB).$$

Eszerint a bal oldal a jobbal egyenlő csak akkor lehet, ha G az EF egyenesen van. Ekkor

$$DC || EF || AB,$$

vagyis az $ABCD$ négyszög trapéz, és ezt kellett bizonyítani.

Megjegyzés. A feladat következő általánosítását tartalmazza *Bollobás Béla* dolgozata: *Ha az $ABCD$ négyszög AD és BC oldalát az M, illetőleg N pont $m : n$ arányban osztja és*

$$MN = \frac{m \cdot DC + n \cdot AB}{m + n},$$

(amit így szokás mondani: MN a DC és AB oldalnak m, illetőleg n súllyal súlyozott számtani közepe), *akkor AB párhuzamos CD-vel, a négyszög trapéz.* Az állítás az AC átlót $m : n$ arányban osztó P pont segítségül vételével a fenti megoldáshoz hasonlóan bizonyítható.

3. feladat. *Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:*

(1) $$x + y = a(\sqrt{x} - \sqrt{y})$$

(2) $$x^2 + y^2 = a(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2,$$

ahol „a” valós szám. „a” mely értékeire lesznek valósak a gyökök?

Megoldás. Az (1) és (2) egyenletekből

$$(x + y)^2 - (x^2 + y^2) = (a^2 - a)(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2,$$

(3) $$2xy = a(a - 1)(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2.$$

Ezt felhasználva a $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$ kifejezést fogjuk átalakítani. Tagokra bontva és (1)-et felhasználva

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = x + y - 2\sqrt{xy} = a(\sqrt{x} - \sqrt{y}) - 2\sqrt{xy}.$$

A jobb oldal utolsó tagját (3) alapján így alakíthatjuk át:

(4) $$2\sqrt{xy} = \sqrt{4xy} = \sqrt{2a(a-1)}(\sqrt{x} - \sqrt{y}).$$

Ezt behelyettesítve

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = \left(a - \sqrt{2a(a-1)}\right)(\sqrt{x} - \sqrt{y}).$$

Innen, ha $\sqrt{x} - \sqrt{y} \neq 0$, akkor

(5) $$\sqrt{x} - \sqrt{y} = a - \sqrt{2a(a-1)},$$

ha pedig $\sqrt{x} - \sqrt{y} = 0$, akkor (2)-ből $x = y = 0$ adódik, ami a tetszés szerinti értéke mellett megoldása az egyenletrendszernek. A továbbiakban csak az ettől különböző megoldásokat keressük.

Meg tudjuk határozni $\sqrt{x} - \sqrt{y}$-hoz hasonlóan $\sqrt{x} + \sqrt{y}$-t is, a négyzetét alakítva át (1), (4) és (5) felhasználásával:

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = x + y + 2\sqrt{xy} = a(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + \sqrt{2a(a-1)}(\sqrt{x} - \sqrt{y}) =$$
$$= \left(a + \sqrt{2a(a-1)}\right)\left(a - \sqrt{2a(a-1)}\right) = a^2 - 2a(a-1) = a(2-a).$$

Innen

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a(2-a)}. \tag{6}$$

(5) és (6)-ból

$$\sqrt{x}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a(2-a)}-\sqrt{2a(a-1)}+a\right), \tag{7}$$

$$\sqrt{y}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a(2-a)}+\sqrt{2a(a-1)}-a\right). \tag{8}$$

Végül négyzetre emeléssel

$$\begin{gathered}x=\frac{1}{4}[a(2-a)+2a(a-1)+a^2+2a\sqrt{a(2-a)}-2a\sqrt{2a(a-1)}-\\ -2\sqrt{a(2-a)2a(a-1)}]=\\ =\frac{1}{4}\left(2a^2+2a\sqrt{a(2-a)}-2a\sqrt{2a(a-1)}-2\sqrt{a(2-a)2a(a-1)}\right),\end{gathered}$$

azaz

$$x=\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a(2-a)}\right)\left(a-\sqrt{2a(a-1)}\right). \tag{9}$$

Ugyanígy nyerjük, hogy

$$y=\frac{1}{2}\left(a-\sqrt{a(2-a)}\right)\left(a-\sqrt{2a(a-1)}\right). \tag{10}$$

Ezek szerint csak (9) és (10) adhatja a feladat megoldását – eltekintve $x=y=0$-tól –, feltéve, hogy értelemmel bír a valós számok körében, azaz sem $a(2-a)$, sem $2a(a-1)$ nem negatív. Az első kifejezés a negatív és 2-nél nagyobb értékeire negatív, a második azokra, amelyekre $0<a<1$. Így csak $a=0$ és $1\le a\le 2$ értékek jönnek tekintetbe. Az $a=0$ és $a=2$ értékre (9) és (10) a már tárgyalt $x=y=0$ megoldást adja, $1\le a<2$-re ettől különböző értékpárokat. Az is világos, hogy az x-re és y-ra (amik (1) és (2)-ben négyzetgyökjel alatt is szerepelnek) kapott értékek nem negatívok, mert a $\sqrt{x}$-re és $\sqrt{y}$-ra kapott (7) és (8) kifejezések is valós számot adnak a szóba jövő a-értékekre, x és y pedig ezekből négyzetre emeléssel keletkezett.

Megmutatjuk még, hogy az $\sqrt{x}$-re $\sqrt{y}$-ra kapott kifejezések sem negatívok. Ekkor ezen kifejezéseket is felhasználva behelyettesítéssel könnyen látható, hogy (9) és (10) valóban megoldását adja az egyenletrendszernek. (7)-ből a

$$\sqrt{x}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a(2-a)}-\sqrt{2a(a-1)}+a\right)=\frac{\sqrt{a}}{2}\left(\sqrt{a}+\sqrt{2-a}-\sqrt{2(a-1)}\right)$$

kifejezés a pozitív $\sqrt{a}+\sqrt{2-a}+\sqrt{2(a-1)}$-gyel megszorozva a következőt kapjuk:

$$\begin{gathered}\frac{\sqrt{a}}{2}[(\sqrt{a}+\sqrt{2-a})^2-2(a-1)]=\frac{\sqrt{a}}{2}\left(a+2-a+2\sqrt{a(2-a)}-2a+2\right)=\\ =\sqrt{a}\left(\sqrt{a(2-a)}+2-a\right).\end{gathered}$$

Ez $1\le a<2$-re pozitív, tehát (7) jobb oldala is. Hasonlóan (8)-ból

$$\begin{gathered}\sqrt{y}\left(\sqrt{2-a}+\sqrt{2(a-1)}+\sqrt{a}\right)=\frac{\sqrt{a}}{2}\left[\left(\sqrt{2-a}+\sqrt{2(a-1)}\right)^2-a\right]=\\ =\frac{\sqrt{a}}{2}\left(2-a+2a-2+2\sqrt{2(2-a)(a-1)}-a\right)=\sqrt{2a(2-a)(a-1)}\ge 0,\end{gathered}$$

ha $1\le a<2$, tehát (8) bal oldala sem lehet negatív.

Ezzel beláttuk, hogy az (1), (2) egyenletrendszernek megoldása minden a mellett az $x=y=0$ értékpár. Ezen kívül $1\le a<2$-re van megoldása, és azt a (7), (8) képletpár szolgáltatja.

Megjegyzések. 1. A közölt megoldás lényegében annak felel meg, hogy $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ és $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ helyett új változókat vezetünk be és először ezeket határozzuk meg.

2. Könnyen kiküszöbölhetjük az egyenletrendszerből a négyzetgyökös kifejezéseket, levonva a (2) a-szorosából (1) négyzetét:

$$\begin{gathered}a(x^2+y^2)-(x+y)^2=a^2\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2-\left[a\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\right]^2=0,\\ (a-1)x^2-2xy+(a-1)y^2=0.\end{gathered}$$

Innen meghatározható az y/x hányados és ennek ismeretében (1)-ből x, majd y. Ezen az úton azonban kissé bonyolultabbak a számítások, mint a fenti megoldásban.