A 683. gyakorlatban és az 1081.feladatban[1] mindkétszer a következő kérdés merült fel: mit jelent az x változó két másodfokú polinomjának együtthatóira az, hogy a két polinom értéke minden x-re megegyezik; vagy rövidebben mondva, hogy a két polinom azonos. Azt a választ kaptuk, hogy ez csak úgy következhet be, ha x hatványai szerint rendezve az x^2 együtthatói is, x együtthatói is és az x-et nem tartalmazó tagok is megegyeznek a két polinomban. Világos, hogy ebben az esetben tényleg megegyezik a két polinom minden x-re.

Van ebben valami meglepő? Ha trigonometriai függvényeket nézünk, azt találjuk, hogy minden egész n-re

$$\cos(n\cdot 120^\circ)-\sin(n\cdot 120^\circ)\cdot \operatorname{tg}\,(n\cdot 120^\circ)\equiv 1$$

anélkül, hogy itt valamiféle tagról tagra való megegyezést felfedeznénk. Vagy minden x-re teljesül a

$$\sin^6 x+\cos^6 x+3\sin^2 x\cos^2 x\equiv 1$$

azonosság, aminek helyessége szintén nem ránézésre világos. Vajon magától értetődő-e ezek után, hogy az

$$\frac{50\,689}{14\,723}x^2-\frac{23\,078}{86\,415}x-\frac{12\,345}{54\,321}\quad \text{és a}\quad \frac{35\,966}{14\,723}x^2+\frac{63\,337}{86\,415}x-\frac{4\,115}{18\,107}$$

polinom (amelyek értéke a 0 és 1 helyen egyező) nem lehet azonos. (Persze pl. $x=2$ vagy $x=-1$ helyettesítésre ez már kiderül, de az esetünkben kissé kellemetlen számítás már.)

Mi az oka akkor annak, hogy másodfokú polinomoknál mégis ilyen egyszerű eljárásunk van annak eldöntésére, hogy két (egyváltozós) polinom azonos-e, ugyanazt az értéket veszi-e fel a változó minden értékére? Mindkét polinomot a változó hatványai szerint rendezzük, és csak ha az egyenlő fokú tagok együtthatói megegyeznek, akkor egyezik meg a két polinom értéke minden helyen. – Érvényes-e hasonló egyszerű szabály magasabb fokú polinomra is? Másodfokú polinomokra a bizonyítás annyiból áll, hogy a két polinom különbségét képezzük, ha ebben a különbségben nem esik ki minden tag külön–külön, akkor egy másodfokú, vagy elsőfokú polinomot, vagy egy 0-tól különböző állandót kapunk, és tudjuk, hogy egy ilyen legfeljebb két, ill. egy helyen, illetőleg soha sem válhat 0-vá, tehát minden x-re semmi esetre sem.

Szabályunk közvetlenül átvihető magasabb fokú polinomra is, ha tudjuk, hogy annak sem lehet végtelen sok gyöke. Másodfokú polinomnál ez a gyöktényezős alakból olvasható le, és hasonló érvényes magasabb fokú polinomra s.[2] Először ezért a gyöktényező kiemelésének lehetőségét vizsgáljuk, és annak felhasználásával bebizonyítjuk, hogy minden polinomnak csak véges számú gyöke lehet.

Legyen

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

egy polinom és a egy tetszés szerinti szám. A polinom értéke az a helyen

$$f(a)=a_0a^n+a_1a^{n-1}+\ldots+a_{n-1}a+a_n.$$

Az $f(x)-f(a)$ különbséget tagonkénti kivonással képezve x és a egyenlő hatványainak különbsége lép fel:

$$f(x)-f(a)=a_0(x^n-a^n)+a_1(x^{n-1}-a^{n-1})+\ldots+a_{n-2}(x^2-a^2)+a_{n-1}(x-a).$$

Minden fellépő különbségből kiemelhetjük az $x-a$ tényezőt a közismert

$$x^k-a^k=(x-a)(x^{k-1}+x^{k-2}a+\ldots+xa^{k-2}+a^{k-1})$$

azonosság alapján, s így $f(x)-f(a)$-t felírhatjuk mint $x-a$-nak és x egy polinomjának a szorzatát. Itt $x-a$ szorzóját általában felírni legfeljebb azért érdemes, hogy fokszámára tehessünk valami megállapítást:

$$\begin{aligned}f(x)-f(a)&=(x-a)\{a_0(x^{n-1}+x^{n-2}a+\ldots+xa^{n-2}+a^{n-1})+\\&\quad+a_1(x^{n-2}+\ldots+xa^{n-3}+a^{n-2})+\ldots+a_{n-2}(x+a)+a_{n-1}\}=\\&=(x-a)\{a_0x^{n-1}+(a_0a+a_1)x^{n-2}+\ldots+(a_0a^{n-2}+a_1a^{n-3}+\ldots+a_{n-2})x+\\&\quad+(a_0a^{n-1}+a_1a^{n-2}+\ldots+a_{n-2}a+a_{n-1})\}.\end{aligned}$$

A legmagasabb fokú tag a zárójelben tehát a_0x^{n-1}, ennek együtthatója ugyanaz, mint $f(x)$ legmagasabb fokú tagjának az együtthatója. Ha ez nem 0, (tehát $f(x)$ n-edfokú, és nem csak *legfeljebb* n-edfokú), akkor $x-a$ szorzója eggyel alacsonyabb, $n-1$-ed fokú.

A legfontosabb az az eset, amikor a a polinom 0-helye, tehát $f(a)=0$. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}f(x)&=(x-a)\big[a_0x^{n-1}+(a_0a+a_1)x^{n-2}+\ldots+(a_0a^{n-1}+\ldots+a_{n-1})\big]=\\&=(x-a)f_1(x).\end{aligned}$$

[1]Lásd ezen számban, 153. és 127. o.

[2]Ennek bizonyítása megtalálható a IV. gimn. tankönyvében (*Hódi E., Szász G., Tolnai J.:* Matematika ált. gimn. IV. o. Számára 213–215. és 222–223. o.). Teljesség kedvéért röviden megismételjük a bizonyítást.

Ez szavakban így fogalmazható:

I. TÉTEL. *Ha $f(x)$ egy n-ed fokú polinom ($n \geqq 1$), és a egy 0-helye, akkor $f(x)$ felírható az $x-a$ gyöktényezőnek és egy $n-1$-ed fokú polinomnak a szorzataként.* A bizonyítás azt is adta, hogy a gyöktényező szorzójában a legmagasabb fokú tag együtthatója ugyanaz, mint $f(x)$-ben. Speciálisan ha $n=1$, akkor ez az együttható lesz $x-a$ szorzója (egy $n-1=0$-d fokú polinom, azaz változót nem tartalmazó, 0-tól különböző állandó).

Ebből már könnyen következik a gyökök számára vonatkozó

II. TÉTEL. *Egy n-ed fokú polinomnak legfeljebb n gyöke lehet.*

A bizonyítás teljes indukcióval történhet. A tétel $n=1$-re igaz. Egy elsőfokú polinom $ax+b$ alakra hozható, ahol $a \neq 0$. Így az $x=-b/a$ helyen eltűnik és más x értékre nem. Elsőfokú polinomnak tehát pontosan egy 0-helye van.

Egy magasabb fokú polinomnak már nem biztos, hogy egyáltalán van 0-helye. A valós számok körében pl. az x^2+2 polinom értéke minden helyen legalább 2.

Tegyük fel, hogy $n-1$-ed fokú polinomokra igaz a tétel: nem lehet $n-1$-nél több 0-helyük, és legyen $f(x)$ egy 1-nél magasabb fokú polinom. Ha $f(x)$ sehol sem 0, akkora tétel rá igaz. Ha van 0-helye, akkor legyen a egy ezek közül: $f(a)=0$. Ekkor az I. tétel szerint $f(x)=(x-a)f_1(x)$ alakban írható, ahol $f_1(x)n-1$-ed fokú. Indukciós feltevésünk szerint $f_1(x)$-nek legfeljebb $n-1$ 0-helye van, $f(x)$-nek tehát legfeljebb n. Ezzel a II. tételt bebizonyítottuk. Mint jeleztük, ebből könnyen következik a polinomok azonosságára vonatkozó tétel.

III. TÉTEL. *Az x változó két polinomja (akkor és) csak akkor egyezik meg x minden értékére, ha mindkettőt x hatványai szerint rendezve az együtthatók tagról tagra megegyeznek.*

Magától értetődő (ezért tettük az állítás első felét zárójelbe), hogy tagról tagra egyező polinomok értéke minden helyen megegyezik. Ha viszont két polinom nem egyezik meg tagról tagra, akkor a különbségüket képezve nem esik ki minden tag, tehát kapunk egy (a 0 állandótól különböző) polinomot. Ennek nem lehet több 0 helye, mint ahányad fokú, tehát nem lehet az értéke minden x-re 0. Ezzel a III. tételt is igazoltuk, ha ugyanis a polinomok egyike sem magasabb, mint n-ed fokú, akkor a különbségük sem lehet magasabb fokú, s így legfeljebb n helyen tűnik el, vagy azonosan 0.

A bizonyítás többet is adott: *ha két legfeljebb n-edfokú polinom $n+1$ helyen megegyezik, akkor minden helyen megegyeznek*, s így a változó hatványai szerint rendezve őket, tagról tagra is megegyeznek. Anélkül, hogy általános következtetéseket vonnánk ebből a megállapításból, egy példán megmutatjuk befejezésül, hogyan használhatjuk fel ezt a tényt polinomok azonosságának megállapítására anélkül, hogy átalakításokat végeznénk rajtuk.

Az

$$(x^5-5x^3+4x)\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}\right) \tag{1}$$

kifejezésről először is megállapíthatjuk a kifejezés átalakítása nélkül, hogy polinom, mert a nevezők 0-helyei: ±1, ±2, gyökei az első tényezőnek, így mindegyikhez tartozó gyöktényező kiemelhető belőle, de ezek éppen az egyes törtek nevezői. Így beszorozva és az egyes nevezőkkel osztva legfeljebb negyedfokú polinomot kapunk. Az egyes egyszerűsítések ugyan pontosan negyedfokú polinomokhoz vezetnek, de ezek összevonásánál a negyedfokú tagok kieshetnek.

Ha megsejtettük még azt is, hogy ez a polinom egyszerűen a $6x^2$ polinom lesz, akkor ezt is igazolhatjuk az átalakítások elvégzése nélkül azáltal, hogy 5 helyen kiszámítjuk az (1) kifejezés értékét és konstatáljuk, hogy megegyezik $6x^2$ értékével. $x=0$-ra mindkét polinom eltűnik. $x=1/2$-re (1) értéke

$$\left(\frac{1}{32}-\frac{5}{8}+2\right)\left(-\frac{2}{3}+2-\frac{2}{3}+\frac{2}{5}\right)=\frac{45}{32}\cdot\frac{16}{15}=\frac{3}{2}=6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

$x=3$-ra

$$(3^5-5\cdot3^3+4\cdot3)\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)=\left\{\left[(3^2-5)\cdot3^2+4\right]\cdot3\right\}\cdot\frac{9}{20}=\frac{120\cdot9}{20}=6\cdot3^2.$$

Ezek után már a $-1/2$ és -3 helyen is megállapíthatjuk (1) értékét anélkül, hogy külön számítást kellene végeznünk. Ha ugyanis (1)-ben x helyébe $-x$-et írunk, akkor az első tényező minden tagja előjelet vált, a második tényezőben pedig az első és utolsó tag egymás negatívjába megy át, és hasonlóan a második és harmadik tag is. Így (1) mindkét tényezője ellenkező előjelűre változik, (1) értéke tehát nem változik: az x és $-x$ helyen ugyanaz. Így a $-1/2$ helyen (1) értéke $\frac{3}{2}=6\left(-\frac{1}{2}\right)^2$, a -3 helyen pedig $54=6(-3)^2$.

Az (1) kifejezés tehát, egy legfeljebb negyedfokú polinom, és értéke a -3, $-1/2$, 0, $1/2$, 3 helyeken megegyezik a $6x^2$ polinom értékével, így a két polinom azonos (mindazokon a helyeken, ahol mind a kettőnek értelme van):

$$(x^5-5x^3+4x)\left\{\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}\right\}\equiv 6x^2.$$

Az olvasó könnyen ellenőrizheti számítással az állítást.