I. megoldás. Válasszuk úgy a koordinátarendszert, hogy origója a közös fókusz legyen, és az első parabola tengelye legyen az y tengely. Ekkor az első parabola vezéregyenese az $y=-p$ egyenes, egyenlete

$$x^2+y^2=(y+p)^2$$

(a bal oldalon a fókusztól, a jobb oldalon a vezéregyenestől mért távolság négyzete áll), avagy

$$y=\frac{x^2-p^2}{2p}. \tag{1}$$

Az x_0 ponthoz tartozó érintő meredeksége a függvény x_0-beli differenciálhányadosával egyenlő: x_0/p, a parabola megfelelő érintőjének egyenlete:

$$y-\frac{x_0^2-p^2}{2p}=\frac{x_0}{p}(x-x_0),$$

ahonnan rendezéssel:

$$x_0x-py-\frac{x_0^2+p^2}{2}=0. \tag{2}$$

Mivel a két parabola tengelye merőleges egymásra, a második parabola tengelye az x tengelyen van, egyenlete a fentiekhez hasonlóan

$$x=\frac{y^2-q^2}{2q}, \tag{3}$$

ahol q a fókusz és a vezéregyenes távolsága, és az y_0 ordinátájú ponthoz tartozó érintő egyenlete

$$-qx+y_0y-\frac{y_0^2+q^2}{2}=0. \tag{4}$$

A (2) és (4) egyenletek csak akkor határozzák meg ugyanazt az egyenest, ha egyik a másiknak valamely konstansszorosa:

$$x_0=-\lambda q; \qquad -p=\lambda y_0; \qquad \frac{x_0^2+p^2}{2}=\lambda\frac{y_0^2+q^2}{2},$$

ahonnan a λ konstansra a

$$(p^2+q^2\lambda^2)(\lambda-1)=0$$

egyenletet kapjuk, és ennek egyetlen valós megoldása $\lambda=1$, ekkor $x_0=-q$, $y_0=-p$, tehát a közös érintő egyenlete:

$$qx+py+\frac{p^2+q^2}{2}=0. \tag{5}$$

Feladatunk első állítását ezzel bebizonyítottuk.

Tekintsük most a két parabola egy-egy érintőjét. (2) és (4) alapján ezek csak akkor merőlegesek egymásra, ha

$$qx_0+py_0=0, \tag{6}$$

ekkor a két egyenes metszéspontja az

$$M\left(\frac{x_0-q}{2}, \qquad \frac{y_0-p}{2}\right)$$

pont, mely rajta van az (5) egyenesen.

Így tulajdonképpen feladatunk állításának a fordítottját láttuk be: a merőleges érintők metszéspontja az (5) alatti közös érintőn van. A fenti lépéseket fordított sorrendben elvégezve kapjuk a kívánt bizonyítást. Az (5) egyenes tetszőleges $M(x_1,y_1)$ pontjához válasszuk meg x_0, y_0 értékét úgy, hogy

$$\frac{x_0 - q}{2} = x_1, \qquad \frac{y_0 - p}{2} = y_1$$

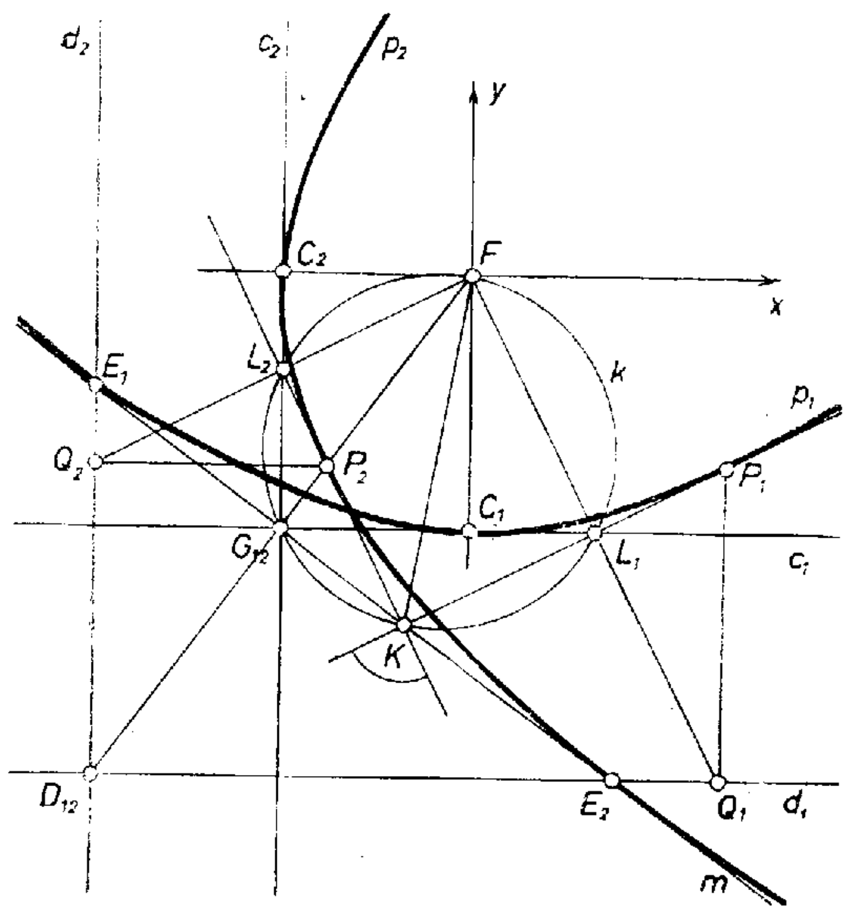
teljesüljön: az így kapott (2) és (4) egyenesek átmennek M-en és merőlegesek egymásra.

II. megoldás. Megmutatjuk, hogy egy parabola P pontján átmenő érintő azonos P-nek a vezéregyenesen levő Q vetülete és az F fókusz közti FQ szakasz felező merőlegesével. Valóban, az I. megoldás (2) egyenlete által meghatározott Q koordinátái $(x_0, -p)$, az FQ szakasz felezőpontja $\left(\frac{x_0}{2}, \quad -\frac{p}{2}\right)$,ez rajta van a (2) alatti érintőn, és az FQ egyenes egyenlete

$$px + x_0 y = 0,$$

ez tehát merőleges (2)-re.

Esetünkben a két parabola tengelyének merőleges volta miatt d_1, d_2 vezéregyeneseik is merőlegesek, és közös D_{12} pontjukat véve a mondott tételben Q szerepére, FD_{12}-nek m felező merőlegese – ahol F a két parabola közös fókuszát jelöli – mindkét parabolát érinti (1. ábra).



1. ábra

(Az is következik innen, hogy m a d_1 vezéregyenesű parabolát a d_2-vel való metszéspontban érinti; a d_2 vezéregyenesű parabolát pedig a d_1-gyel való metszéspontjában.)

Ha bizonyítás nélkül elfogadjuk, hogy a fenti Q-t d-n végigfuttatva a parabola minden érintőjét megkapjuk, akkor az állítás megfordítása így mondható ki: a parabola fókuszának bármely érintőre vett tükörképe rajta van a vezéregyenesen. Ebből következik, hogy két parabolánknak nincs további közös érintője.

Ismét más megfogalmazása a mondott tulajdonságnak a következő: az FQ szakasz G felezőpontjából minden olyan szakasz derékszögben látszik, melynek egyik végpontja F, másik pedig a t érintő valamely (G-től különböző) pontja. És mivel a G pontok összessége a d-nek F-ből a felére kicsinyített c képe – a parabola ún. csúcsérintője –, azért tetszőleges K külső pontból a parabolához húzható érintőknek a c-n levő pontjait az FK átmérőjű Thalész-körrel metszhetjük ki.

Eszerint K-t az m közös érintőn bárhol véve, a k Thalész-kör mindig átmegy FD_{12}-nek G_{12} felezőpontján, ami egyszersmind a c_1, c_2 csúcsérintők közös pontja. Ezeknek k-val való második közös pontját L_1, L_2-vel jelölve a K-ból húzott második érintők közti szög a kerületi szögek tétele és Thalész tétele alapján

$$L_1KL_2\sphericalangle = L_1G_{12}L_2\sphericalangle = 90°,$$

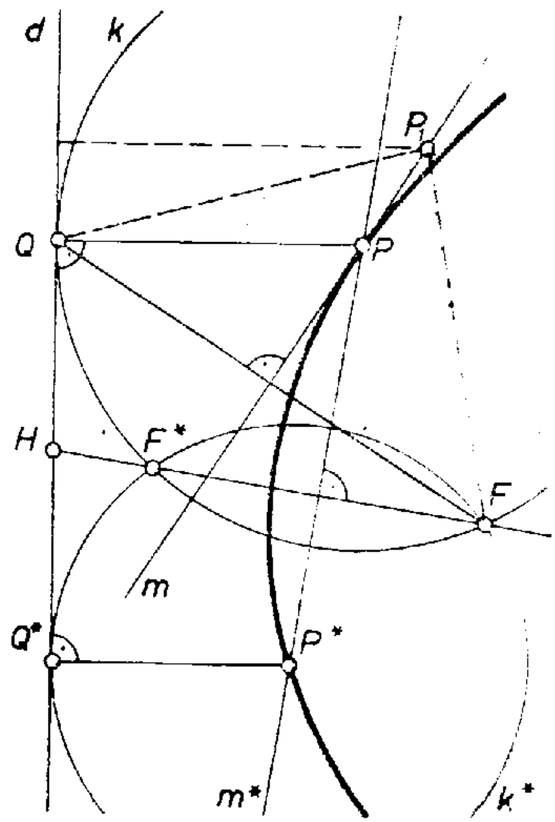
hiszen a csúcsérintők szöge egyenlő a vezéregyenesek, valamint a parabolatengelyek közti szöggel. Az állítást bebizonyítottuk.

*

A parabola felhasznált tulajdonsága megtalálható a gimnáziumok III. osztályaiban az 1967–68. tanév végéig használatban volt tankönyvben[1]. Ott a parabolát az $y = x^2$ egyenlet képeként értelmezték, az érintőt pedig így: az érintő a szelő határhelyzete, amikor a szelőnek és a görbének két metszéspontja egybeesik, és ezekből elemezték ki, hogy a parabola egyszersmind azoknak a pontoknak a mértani helye, amelyek egy adott ponttól ugyanakkora távolságra vannak, mint egy adott egyenestől.

A gimnázium III. osztályának jelenlegi tankönyve viszont a parabolát a most mondott mértani helyként értelmezi, az érintőt pedig (burkoltan) ugyancsak a fenti módon, de csak iránytangensének megállapítására ad eljárást (differenciálható függvényeket ábrázoló görbék eseteire); ezért az alábbiakban inkább elemi úton és koordináták mellőzésével bizonyítjuk a parabola felhasznált tulajdonságát.

Az FQ szakasz m felező merőlegesének és a d-re Q-ban emelt merőlegesnek P metszéspontja parabolapont, hiszen $PF = PQ$, és PQ a P-nek d-től mért távolsága. Eszerint a P középpontú, F-en átmenő k kör érinti d-t, éppen Q-ban. A parabolának m-en P az egyetlen pontja, mert m-nek egy P-től különböző P_1 pontjára $P_1F = P_1Q$, az utóbbi viszont nagyobb P_1-nek d-től mért távolságánál, hiszen P_1Q nem merőleges d-re (2. ábra).



2. ábra

Ha viszont m-et P körül elfordítjuk az m^* helyzetbe, m^*-on van még egy P^* parabolapont, vagyis olyan, hogy a P^* közepű, F-en átmenő k^* kör érinti d-t egy Q^* pontban. Azt állítjuk, hogy Q^* a Q tükörképe arra a H pontra nézve, amelyet az F-ből m^*-ra bocsátott merőleges metsz ki d-ből. Messe FH k-t F^*-ban. Ekkor a H-ból k-hoz húzott érintő és szelő alapján $HQ^2 = HF^* \cdot HF$. a tükrözés miatt $HQ^{*2} = HQ^2$, tehát $HQ^{*2} = HF^* \cdot HF$, vagyis az F, F^*, Q^* pontokon átmenő kört d érinti Q^*-ban. E kör középpontja FF^* felező merőlegesén van, ami a szerkesztés szerint m^*, másrészt a Q^*-ban d-re emelt merőlegesen, tehát P-től különböző pont (hiszen H, és így Q^* is különböző Q-tól), ez a mondott P^*.

Ezek szerint m^*-ot m felé forgatva, amikor egybeesik m-mel, akkor H és Q^* egybeesik Q-val, P^* pedig P-vel, tehát m valóban a parabola érintője.

Eredményünkből az is következik, hogy a P-beli érintő egyszersmind az $FPQ\sphericalangle$ szögfelezője, tehát az állítás felhasznált megfordítása is helyes volt.

[1] *Gallai T.-Hódi E.-Péter R.-Szabó P.-Tolnai J.:* Matematika a gimn. III. o. számára, 9. kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1959. 203–209. o.