(2. befejező közlemény)

Az egyenletes ötszögparkettázsok

A lefedéssel szemben újabb követelményeket támasztva további érdekes eredményeket kaphatunk: a sokszög alakjára vonatkozó elégséges feltételeket ahhoz, hogy a sokszögből parkettázst készíthessünk.

Nevezzük *egyenletesnek* az olyan *másodfajú lefedést*, melyben bármely A és B sokszöghöz tartozik olyan egybevágósági transzformáció (ez tengelyes tükrözés is lehet), mellyel A B-be kerül s az A-val együtt mozgatott parkettázs élei egybeesnek az eredeti parkettázs éleivel.

Ezek elég erős kikötések, mind a fedősokszög alakját, mind a lerakási módot korlátozzák. Több olyan parkettázs nem minősül egyenletesnek, amely egyébként számos szabályszerűséget mutat, pl. a 2., 5. ábrák. Nyilvánvaló viszont, hogy a 3., 6. és 7. ábrák parkettázsai egyenletes lefedések. Megjegyezzük, hogy az egyenletes parkettázs feltételei a három- és négyszögparkettázsok esetében a sokszögek alakját nem korlátozzák. Minden három- és négyszögből lehet készíteni egyenletes lefedést, sőt a tetszőlegesen felvett négyszögből (melyről csak azt használhatjuk ki, hogy négy oldala van, nem hurkolt és belső szögeinek összege 360°) *csak egyenletes parkettázs* készíthető.

A következőkben megvizsgáljuk, hogy milyen konvex ötszögekből készíthető egyenletes lefedés.

Először meghatározzuk, hogy az ötszögcsúcsokból, mint csomókból hány él indulhat ki. Tekintsünk egy egyenletes ötszögparkettázst, jelöljük valamely ötszögének csúcsaiból, mint csomópontokból kiinduló élek számát (valamilyen sorrendben) e_1, e_2, e_3, e_4, e_5-tel (az alapötszög éleit is beleszámítva). E számok között természetesen egyenlők is lehetnek. Jelöljük az $e_1, \ldots, e_5$ számok közül e_1-gyel egyenlők számát – ebbe e_1-et is beleszámítva – k_1-gyel, az e_2-vel egyenlők számát k_2-vel, …, az e_5-tel egyenlők számát k_5-tel. [1]

A meghatározásból következik, hagy az egyenletes parkettázs minden ötszögének megfelelő csúcsaiból, mint csomópontokból rendre e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 él indul ki. Alkalmazzuk az V. tétel bizonyításának módszerét és jelöléseit, továbbá jelöljük az a oldalú négyzetben levő e_i élű csomók számát c_i-vel ($i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$), az összes csomók számát c-vel. [2]

Az a oldalú négyzetben K számú ötszög teljesen benne van, ezért legalább $K \cdot k_1$ számú olyan csúcs van, amelynek csomójából e_1 él indul ki. Így $K \cdot k_1$ nem lehet nagyobb, mint a négyzetben lévő e_1 élű csomókban összeeső csúcsok száma; vagyis $K \cdot k_1 \le e_1 \cdot c_1$. Ennélfogva:

$$\frac{K}{e_1} \le \frac{c_1}{k_1}.$$

Hasonló egyenlőtlenségeket kapunk e_2, e_3, e_4, e_5-re; ezeket összeadva:

$$\frac{K}{e_1}+\frac{K}{e_2}+\frac{K}{e_3}+\frac{K}{e_4}+\frac{K}{e_5} = K\left(\frac{1}{e_1}+\frac{1}{e_2}+\frac{1}{e_3}+\frac{1}{e_4}+\frac{1}{e_5}\right) \le$$
$$\le \frac{c_1}{k_1}+\frac{c_2}{k_2}+\frac{c_3}{k_3}+\frac{c_4}{k_4}+\frac{c_5}{k_5}.$$

Itt a jobb oldalon k_i számú olyan tört áll, melynek nevezője k_i, ezek számlálója a fentiek szerint azonos, így összegük c_i, és a jobb oldal értéke éppen[1] c, eszerint

$$\frac{1}{e_1}+\frac{1}{e_2}+\frac{1}{e_3}+\frac{1}{e_4}+\frac{1}{e_5} = E \text{ jelöléssel} \qquad K \cdot E \le c.$$

A nyert egyenlőtlenségből az 1. közleményben bebizonyított

$$K > \frac{(a-2d)^2}{t} \tag{2}$$

egyenlőtlenség figyelembevételével

$$\frac{(a-2d)^2}{t} \cdot E < c. \tag{5}$$

(Természetesen ismét eleve feltesszük, hogy a lényegesen nagyobb d-nél, mindenesetre $a > 2d$.)

Meggondolásunkat az a oldalú négyzetben levő és oda benyúló L számú sokszögre ismételve K helyére mindenütt L lép, és az egyenlőtlenségek iránya ellentétes a fentiekkel, mert ez az L számú sokszög lefedi az a oldalú négyzetet. Ennélfogva a korábban megállapított

$$L < \frac{(a+2d)^2}{t} \tag{1}$$

[1] Ha pl. $e_1 = e_3 = e_4 \ne e_2 = e_5$, akkor $k_1 = k_3 = k_4 = 3$, és $k_2 = k_5 = 2$.

[2] Avégett, hogy e jelölések tartalmát világosan lássuk, gondoljuk át a következőket. Ha $k_i > 1$, vagyis az ötszögnek nem csak az i-edik csúcsából indul ki e_i számú él, és pl. a j-edik csúcs is ilyen: $e_j = e_i$, akkor c_i és c_j ugyanazt a számot jelölik más alakban; az előző lábjegyzet példájában egyrészt $c_1 = c_3 = c_4$, másrészt $c_2 = c_5$, és így $c = c_1 + c_2$. (Tehát $c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 > c$.) – Ha viszont $k_j = 1$, vagyis e_i minden más e_j-től különböző szám, akkor az illető csomóban levő csúcsok az ötszögek egymásnak megfelelő csúcsai, ezért az itt levő szögek egyenlők, közös értékük $360^\circ / e_i$.

[1] Az előbbi példában
$\frac{c_1}{k_1} = \frac{c_3}{k_3} = \frac{c_4}{k_4} = \frac{c_1}{3}$ és $\frac{c_2}{k_2} = \frac{c_5}{k_5} = \frac{c_2}{2}$; ennélfogva a jobb oldal $3 \cdot \frac{c_1}{3} + 2 \cdot \frac{c_2}{2} = c_1 + c_2 = c$.

becslést is figyelembe véve

$$L \cdot E \geq c \quad \text{és} \quad \frac{(a+2d)^2}{t} \cdot E > c. \tag{6}$$

A lefedés minden csomójában 360° szögtér van. Ahogyan az V. tétel bizonyításában (4)-ben alulról becsültük meg a csomókban levő szögek összegét, hasonlóan itt alulról és felülről becsülve a következő egyenlőtlenséget kapjuk:

$$K \cdot 540^\circ \leq c \cdot 360^\circ \leq L \cdot 540^\circ,$$

azaz osztással, valamint (1) és (2) figyelembevételével

$$\frac{(a-2d)^2}{t} \cdot \frac{3}{2} < c < \frac{(a+2d)^2}{t} \cdot \frac{3}{2}. \tag{7}$$

Megmutatjuk, hogy a fenti E szám értéke $3/2$, mégpedig úgy, hogy az $E : 3/2 = q^2$ hányados értéke 1-gyel egyenlő. (5) és (7) összetevéséből kapjuk:

$$\frac{(a-2d)^2}{t} \cdot E < \frac{(a+2d)^2}{t} \cdot \frac{3}{2}, \tag{8}$$

(6) és (7) összetevéséből pedig:

$$\frac{(a+2d)^2}{t} \cdot E > \frac{(a-2d)^2}{t} \cdot \frac{3}{2}. \tag{9}$$

Eszerint (9)-ből és (8)-ból (q-val q^2 pozitív négyzetgyökét jelölve)

$$\frac{a-2d}{a+2d} < q, \quad \text{és} \quad \frac{a+2d}{a-2d} > q,$$

azaz

$$(1-q) \cdot a < (1+q)2d, \qquad (q-1) \cdot a < (1+q) \cdot 2d.$$

Csak akkor teljesülhet mind a két egyenlőtlenség tetszés szerinti nagy a-ra, ha $1-q=0$, $q=1$. Így valóban $q^2=1$, tehát $E=3/2$, és így az e_i, számokra

$$\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} + \frac{1}{e_3} + \frac{1}{e_4} + \frac{1}{e_5} = \frac{3}{2}. \tag{10}$$

Válasszuk már most az indexeket úgy, hogy álljon $e_1 \leq e_2 \leq e_3 \leq e_4 \leq e_5$. Így

$$\frac{1}{e_1} \geq \frac{1}{e_2} \geq \frac{1}{e_3} \geq \frac{1}{e_4} \geq \frac{1}{e_5}, \text{ tehát}$$
$$5 \cdot \frac{1}{e_1} \geq E = \frac{3}{2}, \text{ és így } e_1 \leq \frac{10}{3} < 4.$$

Másrészt minden csomópontból legalább 3 él indul ki: $e_1 \geq 3$, ezekből következik, hogy $e_1 = 3$. – Hasonlóan $\frac{4}{e_2} \geq E - \frac{1}{3} = \frac{7}{6}$, vagyis $e_2 \leq \frac{24}{7} < 4$, tehát $e_2 = 3$, folytatólag $e_3 \leq \frac{15}{8} < 4$, tehát $e_3 = 3$, majd ugyanígy $e_4 \leq 4$. Eszerint, mivel e_4 megválasztásával (10)-ből e_5 értéke is határozottá válik, két esetet kell tekintenünk:

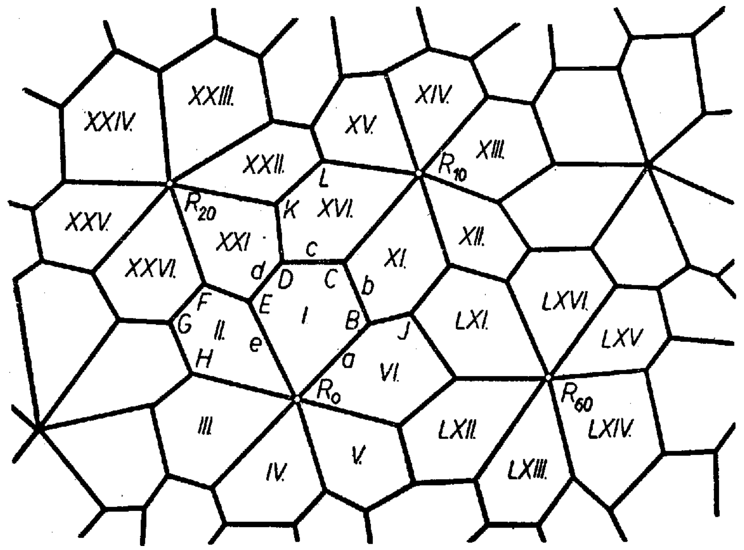
$$a) \text{ ha } e_4 = 3, \text{ akkor } e_5 = 6,$$
$$b) \text{ ha } e_4 = 4, \text{ akkor } e_5 = 4$$

(mindkétszer teljesül $e_5 \geq e_4$).

Azt kaptuk, hogy ha egyáltalán van egyenletes ötszögparkettázs, abban egy-egy ötszög csúcsai a háromélű csomók mellett vagy egy 6-élű, vagy két 4-élű csomóba illeszkednek. E két esetet külön-külön vizsgáljuk tovább.

a) eset. Az ötszögek szögeinek és oldalainak nagyságától ideiglenesen eltekintünk, csak azt vizsgáljuk, hogy ha egyáltalán van olyan egyenletes lefedés, melynek 6-élű csomói is vannak, akkor milyen a lefedés váza, és a vázban mely csúcsok felelnek meg egymásnak.

Tekintsünk egy hatélű csomót, jelöljük R_0-lal (14. ábra).



14. ábra

Az ide befutó $I{-}VI$ ötszögek többi csúcsai (pl. B, C, D) a lefedésnek háromélű csomói. Az így kapott tizennyolcszög minden harmadik csúcsába már 3 él fut be (pl. B, E, H), ezekből már nem indulhat ki több él, a többi csúcsba pedig (pl. C, D, F, G) az eddig megrajzolt ötszögeknek 2–2 éle fut be, s így ezekből a meglevőkön kívül még 1–1 él indul ki.

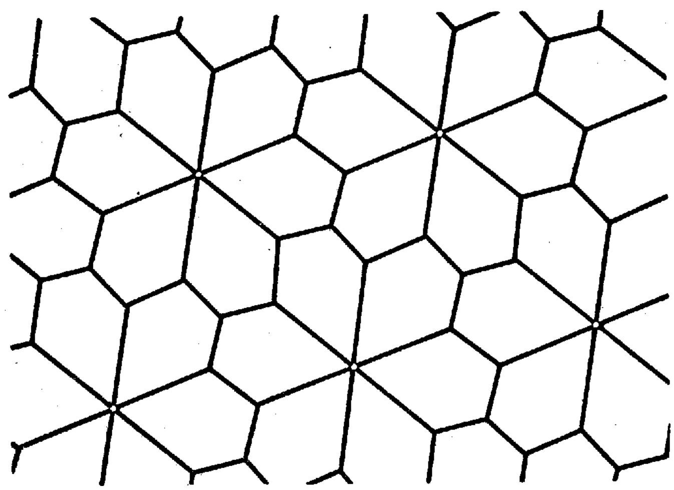
Az I és VI ötszögek közös 3-élű B csomópontjába befutó harmadik ötszög legyen XI. Mivel XI-nek már három csúcsa megvan (J, B és C), s ezek I és VI-ból háromélű csomók, XI egyetlen hatélű csomóját vagy J-vel, vagy C-vel él köti össze. Feltehetjük, hogy a XI-re illeszkedő hatélű R_{10} csomót C-vel köti össze egy él (CR_{10} a XI ötszög oldala).

Az R_{10} csomóba befutó $XI - XVI$ ötszögek hatélű csomója R_{10}, ezért ezen ötszögek további csúcsai háromélű csomókra illeszkednek.

Az R_0 és R_{10} csomókból kiinduló élek másik végpontjára (pl. B, E, H; C, L), valamint az I és XVI ötszögek közös D és a VI és XI ötszögek közös J csúcsára csak a meglévő élek illeszkednek, az eddig lefedett terület határán levő többi csúcsokban pedig egy-egy újabb él végződik. Ennélfogva a II, I és XVI ötszögeknek van egy közös szomszédjuk, legyen ez XXI. XXI-nek négy csúcsa: F, E, D és K már adott, ezek háromélű csomókban vannak, ezért ötödik csúcsa egy R_{20} hatélű csomóra illeszkedik.

Hasonlóképpen a VI, XI, és XII ötszögeknek is van egy LXI közös szomszédja. Ezen ötszögnek is négy csúcsa adott; ezek a lefedésben háromélű csomók, ezért az ötödik csúcs egy R_{60} hatélű csomóba esik. Ennélfogva az R_{20} és R_{60} hatélű csomókba befutó $XXI - XXVI$ és $LXI - LXVI$ ötszögek váza egyértelműen megrajzolható.

A váz felépítését ehhez hasonlóan, egyértelmű lépések sorozatával folytathatjuk. Látható, hogy az $I - VI$ ötszögek egységét hat ugyanilyen egység teljesen körülveszi. A továbbiakban az ilyen egységeket (egy hatélű csomóra illeszkedő hat ötszög) rózsáknak nevezzük, s a hatélű csomójának betűjével utalunk rá, pl. az $I - VI$ ötszögek alkotta rózsát R_0-nak nevezzük.



15. ábra

Kimutatjuk, hogy – ha egyáltalán van ilyen vázú lefedés, akkor – egy rózsa ötszögeit a rózsa hatélű csomója körüli forgatással egymásba vihetjük át. Ehhez elegendő bizonyítanunk, hogy pl. az I ötszöget forgatással átvihetjük a II ötszögbe.

A definíció szerint *van olyan* transzformáció, mely I-et úgy viszi át VI-ba, hogy az eredeti és transzformált parkettázs élei megegyezzenek. Mivel az R_0 pont csakis önmagába mehet át, ez a transzformáció vagy az R_0E tengelyre való tükrözés, vagy az R_0 csomópont körüli forgatás. Kimutatjuk, hogy az előbbi lehetetlen. Ha ugyanis I tengelyes tükrözéssel menne át II-be, R_0 és E helyben maradása miatt D az F pontba menne át. Ez viszont lehetetlen, mert az eredeti parkettázsban a D-re illeszkedő élek háromélű csomókba futnak, az F-re illeszkedő élek végpontjai közül viszont R_{20} hatélű. Ennélfogva egy rózsán belül az ötszögeket a rózsa hatélű csomója körüli forgatással egymásba vihetjük át, vagyis bármely rózsa hat ötszögében a megfelelő csúcsok azonos körüljárás szerint következnek egymás után.

Bebizonyítjuk, hogy különböző rózsák ötszögei is azonos körüljárásúak. Ehhez elegendő kimutatnunk, hogy két szomszédos rózsa, pl. az R_{10} és R_{20} rózsa ötszögeinek körüljárási iránya ugyanaz. Fent beláttuk, hogy az I ötszöget csak az R_0 csomó körüli forgatás viheti át II-be úgy, hogy az eredeti és transzformált parkettázs vázai megegyezzenek. Ez a forgatás az R_{10} csomót az R_{20} csomóba, az R_{10} rózsa ötszögeit az R_{20} rózsa ötszögeibe viszi. Mivel a forgatás nem változtatja meg a sokszög körüljárási irányát, az R_{10} és R_{20} rózsa ötszögei ugyanolyan körüljárásúak. Hasonlóan látható be, hogy az R_{20} és R_0, R_{10} és R_0, R_0 és R_{60} rózsa ötszögeinek körüljárási iránya ugyanaz. Mivel bármely rózsából kiindulva eljuthatunk a parkettázs bármely rózsájához úgy, hogy mindig szomszédos rózsára lépünk át, a fentiekből valóban következik, hogy a parkettázs bármely két ötszöge ugyanolyan körüljárású.

Betűzzük meg az I öszög oldalait a következőképpen: $R_0B = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DE = d$, $ER_0 = e$, s az R_0, B, C, D, E csúcsokban levő szöget jelöljük rendre α, β, γ, δ, ε-nal. Ekkor a II, III, IV, V, VI ötszögek R_0 csúcsában levő szög is α nagyságú, ezért $\alpha = \dfrac{360°}{6} = 60°$. Az ötszögek körüljárási irányának azonossága miatt a II ötszögben $R_0E = a$, $EF = b$, az E-nél levő szög β; a XXI ötszögben $FE = b$, $ED = c$, $DK = d$, az E-nél levő szög γ, a D-nél levő szög δ; a XVI ötszögben pedig $KD = c$, $DC = d$, és a D-nél levő szög δ. Ennélfogva $R_0E = a = e$, $CD = c = d$ (ugyanígy: $DE = d = c$). A csomópontokban levő szögek összege 360°, ezért az E csomópont alapján:

$$\varepsilon + \gamma + \beta = 360°$$

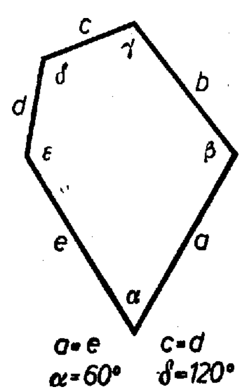
a D csomópontban összefutó szögekre pedig:

$$\delta + \delta + \delta = 3\delta = 360°,$$

s így

$$\delta = 120°.$$

A lefedésnek a 15. ábrán bemutatott részletéből láthatjuk, hogy a fent kimondott feltételeknek eleget tevő ötszöggel (16. ábra) valóban készíthető lefedés.



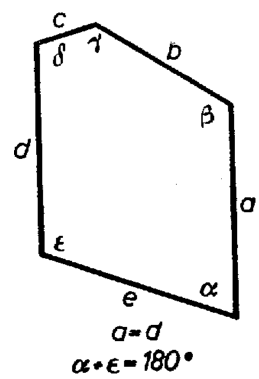
16. ábra

Ez egyben annak is bizonyítása, hogy *a)* esethez valóban tartozik ötszögparkettázs.

b) eset. Az egyenletes parkettázs feltételeinek eleget tevő ötszögeket ebben az esetben is a lefedés vázából kiindulva határozhatjuk meg. Itt kétféle váz lehetséges, mert egy ötszög négyélű csomóba illeszkedő csúcsait vagy oldal köti össze, vagy nincsenek összekötve. E két váz kiépítése, majd az adódó diszkussziók elvégzése után a következő eredményt kapnók:

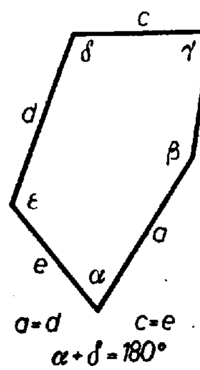
Jelöljük a parkettázs ötszögének oldalait és szögeit rendre a, b, c, d, e, ill. α, β, γ, δ, ε-nal (ahol a és b szöge β, b és c szöge γ). Ha a parkettázs egy ötszögének négyélű csomóba illeszkedő csúcsait az e oldal köti össze, akkor (17. ábra)

$$a = d \text{ és } \alpha + \varepsilon = 180°.$$



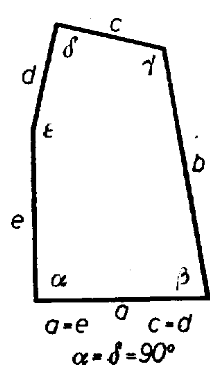
17. ábra

Ha a négyélű csomókat nem köti össze él, akkor a következő összefüggéseknek kell fennállniuk:
vagy $a = d$, $c = e$ és $\alpha + \delta = 180°$ (18. ábra),



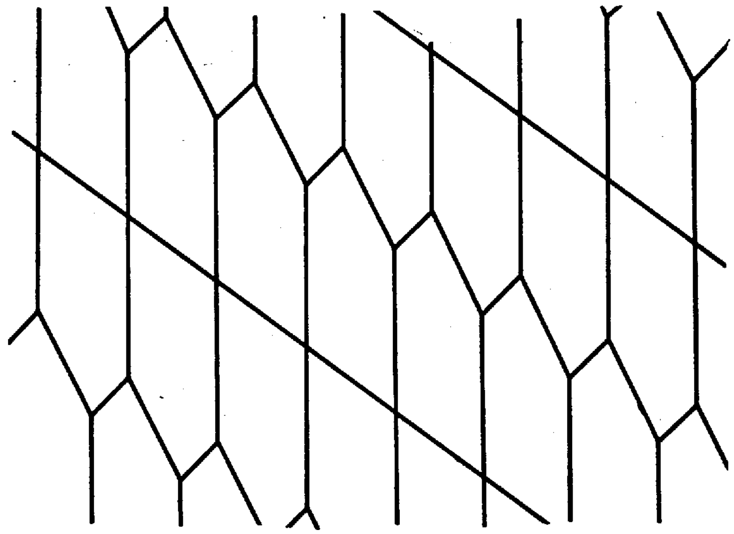
18. ábra

vagy $a = e$, $c = d$ és $\alpha = \delta = 90°$ (19. ábra).

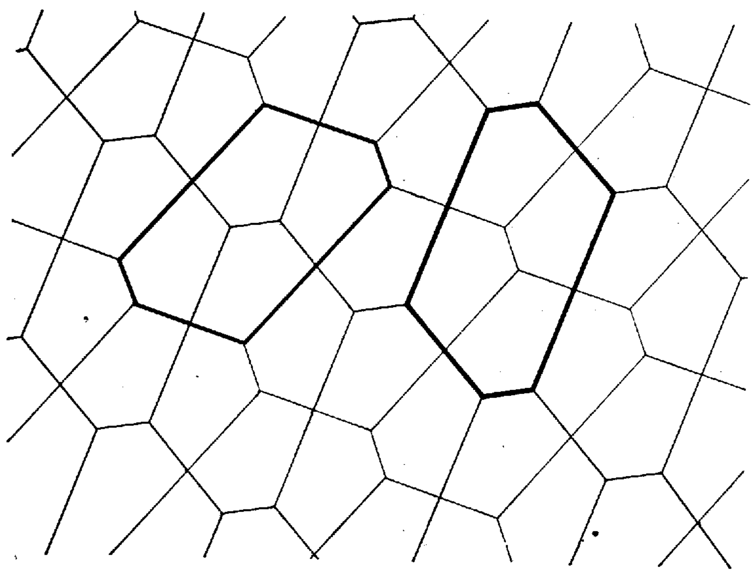


19. ábra

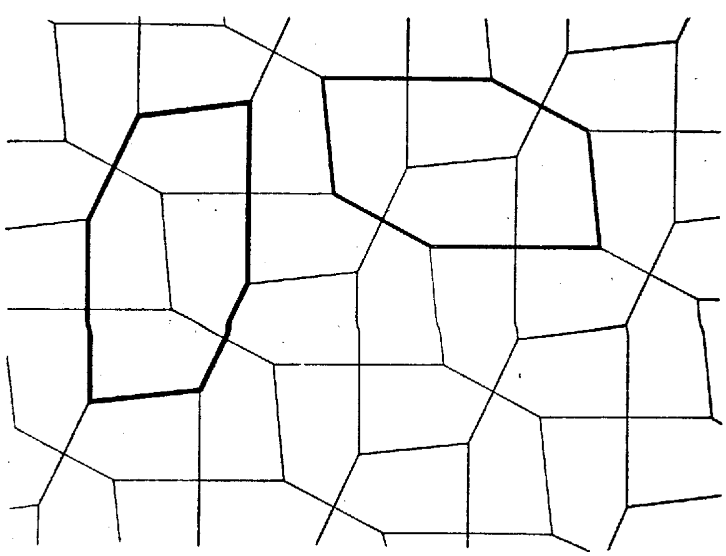
A 20., 21. és 22. ábrán látható parkettázsrészletek bemutatják, hogy ezen ötszögekkel milyen rendszer szerint fedhetjük le a síkot.



20. ábra



21. ábra

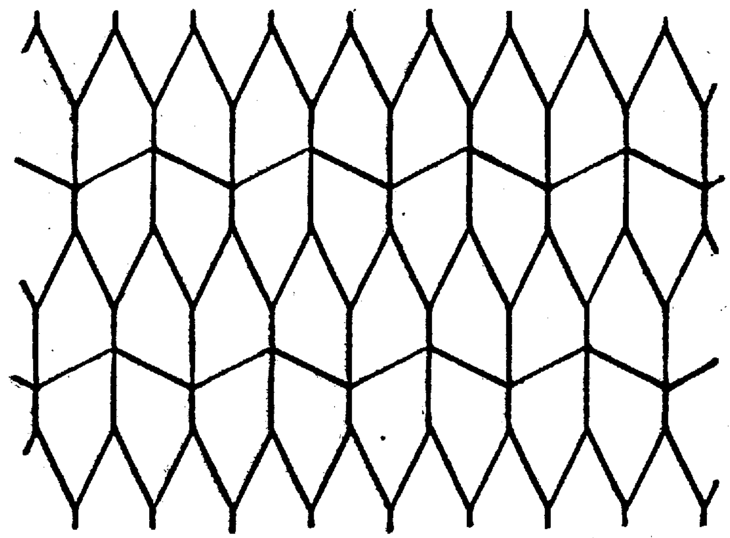


22. ábra

Megállapításainkat a következő tételben foglalhatjuk össze:

VI. tétel: *Egy ötszögből akkor és csak akkor készíthető egyenletes lefedés, ha az ötszögben megvannak a* 16., 17., 18. és 19. *ábra ötszöge közül legalább egynek a tulajdonságai.*

Megjegyzendő, hogy az ismert ötszögparkettázsok nem mind egyenletesek.



23. ábra

A 23. ábrán látható másodfajú ötszögparkettázs pl. nem egyenletes, és alapötszögével nem is lehet egyenletes parkettázst készíteni. (Ezen ötszögre a $b = c$, $\beta = \delta$ és $\alpha + \varepsilon = 180°$ összefüggések állnak.)

A konvex sokszögekkel történő lefedéshez hasonlóan igen érdekes problémák adódnak a konkáv sokszögekből képezhető parkettázsok körében is. Ott a problémák még szerteágazóbbak, még több megoldatlan kérdést ismerünk. Sok esetben a konvex parkettázsokkal ellenkező, néha viszont megegyező tételek állanak fenn. Könnyen belátható pl. hogy az V. tételnek éppen az ellenkezője érvényes: bármely $n > 3$-ra megadható konkáv n-szög, amellyel parkettázs készíthető.

(Ilyet ad $n = 5$-re a 7. ábra konkáv centrálszimmetrikus hatszögének olyan a centrumon átmenő egyenes kettévágása, amely nem megy át csúcson; ilyenek $n = 18$-ra a 14. ábra rózsái, $n = 9$-re ugyanott a VI, XI, LXI idomok együttese, $n = 42$-re ugyanott az R_0, R_{10}, R_{20}, R_{60} rózsák együttese.) Említettük viszont, hogy a II. tétel konkáv négyszögekre is érvényes.