I. megoldás. A függvény minden x értékre értelmezve van, mert $a>0$ folytán a négyzetgyökjel alatt nem állhat negatív érték. Emiatt

$$\sqrt{\sin^2 2x + a\cos^2 x} \geqq \sqrt{\sin^2 2x} = |\sin 2x|,$$

így a függvény értéke sehol sem negatív, a 0 értéket viszont felveszi, ahol $\cos x = 0$, azaz

$$x = x_m = \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad (k \text{ egész}).$$

A függvény minimuma tehát 0.

Jelöljük a függvényértéket röviden y-nal. Az ezt megadó összefüggésből olyan egyenletet alakítunk, amelyben csak egyetlen szögfüggvény szerepel. $y - \sin 2x$ négyzetét felírva és rendezve

$$y^2 - 2y\sin 2x = a\cos^2 x.$$

Innen $2y\sin 2x = 4y\sin x\cos x$ négyzetét heghatározva egy csak $\cos x$-et tartalmazó összefüggést kapunk:

$$16y^2(1-\cos^2 x)\cos^2 x = y^4 - 2ay^2\cos^2 x + a^2\cos^4 x,$$

vagy $\cos x$ hatványai szerint rendezve

$$(a^2+16y^2)\cos^4 x - 2y^2(a+8)\cos^2 x + y^4 = 0.$$

Ez $\cos^2 x$-re másodfokú egyenlet. y csak olyan értékeket vehet fel, amikre ennek van megoldása, tehát a diszkrimináns. ill. annak negyedrésze nem negatív:

$$y^4(a+8)^2 - y^4(a^2+16y^2) = 16y^4(a+4-y^2) \geqq 0.$$

Ez fennáll, ha $y=0$ vagy ha a második tényező nem negatív, így

$$y \leqq \sqrt{a+4}.$$

A $\sqrt{a+4}$ értéket arra az x értékre veheti fel y, amelyre (a fenti egyenletből)

$$\cos^2 x = \frac{a+4}{a+8}.$$

Ez pozitív, 1-nél kisebb érték, mivel $a>0$, így van olyan x, amire

$$\cos\ x = \sqrt{\frac{a+4}{a+8}}, \text{ ill. amire } \cos x = -\sqrt{\frac{a+4}{a+8}}.$$

Behelyettesítés azt adja, hogy az először említett helyeken a függvény valóban a $\sqrt{a+4}$ értéket veszi fel (az utóbbiakon nem). Így a függvény maximális értéke $\sqrt{a+4}$.

II. megoldás. A maximumnak a derivált 0-helyeiből való meghatározása céljára x helyett bevezetjük a $t/2$ változót, tehát az $f(x) = f(2t) = g(t)$ függvény maximumát keressük. Így

$$f(x) = g(t) = \sin t + \sqrt{\sin^2 t + \frac{a}{2}(1+\cos t)},$$

$$(1) \qquad g'(t) = \cos t + \frac{\sin t\cos t - \dfrac{a}{4}\sin t}{\sqrt{\sin^2 t + \dfrac{a}{2}(1+\cos t)}}.$$

A nevező a maximum helyén nem lehet 0, más szóval a $t = \pi + 2k\pi$ helyet kizárjuk, $g(t)$-t 2π szerint periodikus volta alapján csak a $0 \leqq t < \pi$ és $\pi < t < 2\pi$ intervallumokban vizsgáljuk.

A $g'(t) = 0$ követelményből rendezéssel, négyzetreemeléssel és ismert azonosságok alkalmazásával

$$\cos^2 t\left\{\sin^2 t + \frac{a}{2}(1+\cos t)\right\} = \left(\frac{a}{4} - \cos t\right)^2 \sin^2 t,$$

$$\frac{a}{2}\cos t(1+\cos t) - \frac{a^2}{16}(1-\cos^2 t) = 0,$$

$$\frac{a}{16}(1+\cos t)\{(a+8)\cos t - a\} = 0,$$

vagyis maximum csak ott lehet, ahol

$$(a+8)\cos t - a = 0,$$

$$\cos t = \frac{a}{a+8}. \tag{2}$$

Ez $a > 0$ miatt a $(0, \pi/2)$ és $(3\pi/2, 2\pi)$ intervallumokban ad egy-egy értéket. Minthogy azonban a négyzetre emeléssel nem ekvivalens átalakítást végeztünk, ezeket ellenőriznünk kell. (2) helyettesítésével (1) első tagja és a második tag nevezője pozitív, a számláló pedig

$$-\frac{a(a+4)}{4(a+8)}\sin t,$$

a $(3\pi/2, 2\pi)$ intervallumban pozitív, ott tehát $g'(t) = 0$-nak nincs gyöke. A $(0, \pi/2)$ intervallumbeli t_M értékre, vagyis ahol

$$\cos t_M = \frac{a}{a+8}, \qquad \sin t_M = \frac{4\sqrt{a+4}}{a+8},$$

teljesül $g'(t_M) = 0$, ugyanis a nevező értéke $\dfrac{\sqrt{(a+4)^3}}{a+8}$.

Minthogy pedig a t_M-et közrefogó 0 és $\pi/2$ helyeken $g'(0) = 1 > 0$ és $g'(\pi/2) < 0$, azért itt létezik maximum, és értéke

$$\frac{4\sqrt{a+4}}{a+8} + \frac{(a+4)\sqrt{a+4}}{a+8} = \sqrt{a+4}.$$

Papp Zoltán (Debrecen, Fazekas M. Gimn.)