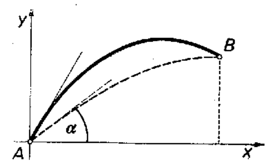
Ebben a cikkben egy példával kapcsolatban olyan fogalmat ismerünk meg, amely tulajdonképpen a felsőbb matematikába tartozik, mégis hozzáférhető egyszerű eszközökkel.

Adott A pontból meghatározott c kezdősebességgel történő ferde hajítással, el kell találni egy meghatározott helyzetű B pontot. Milyen α szöggel történjék a hajítás?



B pont helyzetét $x = AC$ és $y = CB$ koordinátái határozzák meg. Az elhajított tárgy helyzetét, mint az idő függvényét a ferde hajítás közismert törvényei alapján ezek a képletek adják meg:

$$x = c\cos\alpha \cdot t,$$
$$y = c\sin\alpha \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2.$$

t idő kiküszöbölésével kapjuk a pálya függvényeit:

$$y = \mathrm{tg}\ \alpha \cdot x - \frac{g}{2c^2\cos^2\alpha} \cdot x^2.$$

Célszerű rövidítő jelölésként vezessük be az $F = \dfrac{c^2}{2g}$ mennyiséget, a függőleges felfelé hajítás magasságát. Ezt használva

$$y = \mathrm{tg}\ \alpha \cdot x - \frac{1}{4F\cos^2\alpha} \cdot x^2.$$

Feladatunk azon α szög megkeresése, amely mellett a c kezdősebességgel elhajított tárgy eltalálja B pontot. Ebben az esetben a pályát jellemző függvényben x és y jelentik a megadott B pont koordinátáit, α pedig az ismeretlen. Felhasználva az $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \mathrm{tg}^2\alpha$ azonosságot

$$y = \mathrm{tg}\ \alpha \cdot x - \frac{1}{4F} \cdot \left(1 + \mathrm{tg}^2\alpha\right) x^2.$$

Ezt az egyenletet tg α szerint rendezzük:

$$x^2\mathrm{tg}^2\alpha - 4Fx \cdot \mathrm{tg}\ \alpha + (4Fy + x^2) = 0.$$

Megoldjuk tg α-ra, és megkapjuk a B pont eltalálásához szükséges szöget:

$$\mathrm{tg}\ \alpha = \frac{2F \pm \sqrt{4F^2 - 4Fy - x^2}}{x}.$$

Lássunk egy számpéldát. Legyen $c = 28$ m/sec, $g = 980$ cm/sec^2, ekkor $F = 40$ m. Az eltalálandó B pont koordinátái legyenek $x = 50$ m, $y = 21{,}875$ m. Ekkora megoldóképlet alapján:

$$\mathrm{tg}\ \alpha = 1{,}6 \pm 0{,}4, \qquad \mathrm{tg}\ \alpha_1 = 1{,}6 + 0{,}4 = 2, \qquad \alpha_1 = 63°26',$$
$$\mathrm{tg}\ \alpha_2 = 1{,}6 - 0{,}4 = 1{,}2, \qquad \alpha_2 = 50°12'.$$

Tehát adott sebesség mellett B pont két röppályán található el, amelyek közül az egyik laposabb, és ezen rövidebb idő alatt ér az elhajított tárgy a B pontba, a másik pálya meredekebb, ezen később ér B-be az elhajított tárgy. Ezt a fizikai körülményt, hogy megadott sebességgel két pályán érhető el B pont, az tükrözi vissza, hogy egyenletünknek két megoldása van.

Más a helyzet, ha a célba vett pont másutt van. Legyen például ugyanazon $c = 28$ m/sec sebesség mellett $x = 5000$ m, $y = 4000$ m. Az adatokra ránézve azonnal feltűnik, hogy itt valami nincs rendben: ilyen messze levő célpont ezzel a sebességgel nem található el. Kiderül ez az egyenlet oldóképletéből is, amelyben a négyzetgyök alatti mennyiség ekkora x és y mellett negatív.

Ha tehát adott c sebességgel hajítunk a legkülönbözőbb irányokba, akkor a tér pontjai két csoportba oszthatók. Vannak olyan pontok, amelyek két hajítási pályán is eltalálhatók (ilyenkor egyenletünk oldóképletében a négyzetgyök alatti mennyiség pozitív). De vannak olyan pontok is, amelyek a megadott elhajítási sebesség mellett semmiféle módon sem érhetők el (ekkor a gyökjel alatti mennyiség negatív). A függőleges sík (a tér) pontjai két tartományra oszlanak: a kétféle pályán eltalálható és az egyáltalán el nem érhető pontok összességére. Ez a két tartomány valahol, egy görbe mentén határos. Ha olyan pontot választunk ki, amely a határoló görbe mentén fekszik, és ennek koordinátáit helyettesítjük a megoldóképletbe, akkor a gyökjel alatti mennyiség nulla:

$$4F^2 - 4Fy - x^2 = 0.$$

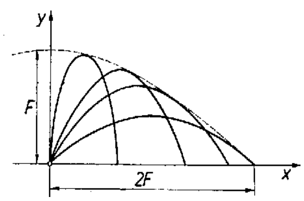
Az egyenletnek ilyenkor csak ez az egy megoldása van:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2F}{x}.$$

Tehát a $4F^2 - 4Fy - x^2 = 0$ egyenlet olyan x, y koordinátájú pontokat választ ki, amelyek csak egyféle pályán érhetők el. Az egyenlet rendezve:

$$y = F - \frac{1}{4F}\cdot x^2.$$

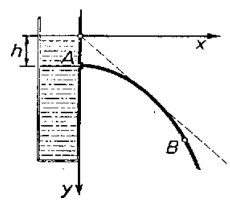
Ez a görbe olyan parabolát jelent, amely az y tengelyt F, az x tengelyt $\pm 2F$ távolságban metszi, és fókusza az origóban van. Neve burkológörbe. Adott kezdősebességű hajításokat tekintve ezen vannak azok a legmesszebb fekvő pontok, amelyek a hajítással elérhetők, és ezek a pontok csak egyetlen hajítási pályával érhetők el.



Valamennyi (adott c kezdősebességű, különböző indulási szögű) hajítási pálya belülről érinti a burkológörbét. Természetesen ugyanez a helyzet valamennyi, az y tengelyen átmenő függőleges síkban: a burkoló parabolák forgás felületet, forgási paraboloidot alkotnak. Ezt ismerve sok feladatot igen gyorsan tudunk megoldani. Például a legnagyobb hajítási távolságot a burkolófelületnek az x tengellyel való metszéspontja jelöli meg. Ekkor a célpont x koordinátája $x = 2F$ és az ehhez a pályához tartozó elhajítási szög $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2F}{x}$ alapján: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2F}{2F} = 1$, így $\alpha = 45°$.

A burkológörbe szerepéről lássunk még egy példát. Adva van egy vízzel telt edény, függőleges oldalfalakkal. A víz felszíne alatt milyen mélységben (h) kell lyukat nyitnunk, hogy a vízszintes hajítás törvénye szerint kiömlő vízsugár eltalálja a megadott helyzetű, x, y koordinátájú B pontot?

Egyszerűség kedvéért helyezzük az origót az edény oldalfalához, a víz felszínére, és az y tengelyt irányítsuk lefelé.



h mélységből $c = 2gh$ sebességgel ömlik ki a víz és t másodperc alatt $x = ct$ távolságra, $y = \frac{g}{2}\cdot t^2 + h$ mélységre jut el. A vízsugár ugyanis h mélységben indul el, és ehhez kell hozzáadni az esés útját. t kiküszöbölésével kapjuk a hajítási pálya függvényét:

$$t = \frac{x}{c}, \quad y = \frac{g}{2}\cdot\left(\frac{x}{c}\right)^2 + h, \quad y = \frac{g}{2c^2}\cdot x^2 + h.$$

Felhasználva a kezdősebesség $c = \sqrt{2gh}$ értékét:

$$y = \frac{1}{4h}\cdot x^2 + h.$$

A pálya függvényéből kiesik g; az edényből kiömlő víz pályái a Holdon is ugyanazok volnának. Ennek oka: kisebb g esetén a gravitáció kisebb mértékben görbíti lefelé a parabolát, viszont kisebb a kezdősebesség is.

A mi feladatunkban az a kérdés, adott x, y koordinátájú B pont eltalálásához milyen mélyen nyissunk lyukat az edényen? Egyenletünket adott x, y mellett h-ra kell megoldanunk. Rendezve:

$$4h^2 - 4yh + x^2 = 0.$$

Ennek megoldása

$$h = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - x^2}}{2}.$$

Ismét két megoldás adódik, kétféle lyukmélység mellett találja el a vízsugár a B pontot. A burkológörbén fekvő pontok x, y koordinátáinak összefüggését a négyzetgyök alatti mennyiség eltűnése szolgáltatja:

$$y^2 - x^2 = 0.$$

Innen $y = x$. Tehát a burkológörbe 45°-ban lefelé haladó egyenes.

Gondolatmenetünk egyszerű eszközökkel vezetett el a burkológörbe fogalmához, ez pedig elősegíti egyes feladatok megoldását. (Lásd a közölt ide tartozó feladatot!)